
Physique et Laboratoires de physique - 1ère biologie médicale -
HEPCUT

François Mansy

Table des matières

I	Introduction	7
II	Les mesures	11
1	Les unités	12
1.1	Systèmes d'unités	13
1.2	Equations aux dimensions	14
1.3	Tableau des unités du système international	14
1.4	Définition des unités de base	15
2	Erreurs et incertitudes de mesure	17
2.1	Généralités	17
2.1.1	Erreur et incertitude relative et absolue	18
2.1.2	Erreur systématique et incertitude accidentelle	18
2.1.3	Précision d'un appareil	19
2.2	Calcul d'incertitudes	19
2.2.1	Utilisation des dérivées partielles	21
2.2.2	Mesures directes et indirectes	22
2.3	Chiffres significatifs	26
2.4	Conduite des calculs et expression des résultats	27
III	Optique géométrique	29
3	Propagation de la lumière	32
3.1	Sources lumineuses	32
3.2	Corps transparents et translucides	32
3.3	Propagation de la lumière	33
3.4	Rayons et faisceaux lumineux	33
3.5	Célérité de la lumière	34
3.5.1	Vitesse de la lumière dans le vide	34
3.5.2	Interaction de la lumière avec la matière	35
3.5.3	Historique : expériences de Fizeau et de Foucault	35

4	Réflexion de la lumière	38
4.1	Généralités	38
4.1.1	Lois de réflexion sur les miroirs	39
4.1.2	Retour inverse de la lumière	42
4.2	Miroirs plans	42
4.2.1	Objets et images, réels et virtuels	42
4.2.2	Construction de l'image	44
4.2.3	Champ d'un miroir	45
4.2.4	Rotation d'un miroir : Le théorème de POGGENDORF	46
4.3	Miroirs sphériques	47
4.3.1	Images données par un miroir sphérique concave	48
4.3.2	Images données par un miroir sphérique convexe	48
4.3.3	Tableau récapitulatif des différents cas	49
4.4	Applications : le miroir comme outil de réflexion	50
5	Réfraction de la lumière	53
5.1	Généralités	53
5.1.1	Lois de la réfraction	54
5.1.2	Indice de réfraction absolu et relatif	54
5.1.3	Réfraction limite et réflexion totale	56
5.2	Dioptre plan, lame à faces parallèles	57
5.2.1	Image donnée par un dioptre plan	58
5.2.2	Principe de Fermat	59
5.2.3	Image donnée par une lame à faces parallèles	59
5.3	Prisme	60
5.3.1	Formules fondamentales du prisme	62
5.3.2	Conditions d'émergence	62
5.3.3	Minimum de déviation	63
5.3.4	Image d'un objets donnée par un prisme	65
5.4	Lentilles sphériques minces	65
5.4.1	Généralités	65
5.4.2	Lentilles convergentes	69
5.4.3	Lentilles divergentes	72
5.5	Focométrie	74
5.5.1	Vergence d'un système de lentilles minces accolées	74
5.5.2	Calcul de la vergence d'une lentille mince	75
5.5.3	Mesure de la vergence d'une lentille mince	76
5.6	Défauts des lentilles	80
5.6.1	Chromatisme	80
5.6.2	Coma	80
5.6.3	Astigmatisme	81
5.6.4	Sphéricité	81

6	Instruments d'optique	83
6.1	L'oeil	83
6.2	La loupe	83
6.3	Le microscope	83
6.4	L'appareil photographique	83
IV	Mécanique rationnelle	84
7	Calcul vectoriel	88
7.1	Scalars et vecteurs	88
7.1.1	Scalaire :	88
7.1.2	Vecteur (lié) :	89
7.1.3	Vecteur libre :	90
7.1.4	Vecteur glissant :	91
7.2	Opérations sur les vecteurs	92
7.2.1	Addition de 2 vecteurs	92
7.2.2	Soustraction de 2 vecteurs	95
7.2.3	Multiplication d'un vecteur par un scalaire	97
7.2.4	Norme d'un vecteur	99
7.2.5	Produit scalaire de 2 vecteurs	101
7.2.6	Produit vectoriel de 2 vecteurs	107
7.2.7	Identités de Lagrange	111
8	Cinématique du point	114
8.1	Dérivées, trajectoire, vitesse et accélération	114
8.1.1	Trajectoire	114
8.1.2	Vitesse moyenne et vitesse instantannée	115
8.1.3	Accélération moyenne et accélération instantannée	119
8.1.4	Equation différentielle du mouvement	122
8.2	Mouvements particuliers	124
8.2.1	Mouvement rectiligne uniforme	124
8.2.2	Mouvement rectiligne uniformément accéléré	125
8.2.3	Mouvement circulaire uniforme	129
8.2.4	La parabole de tir	132
8.3	Applications de la cinématique	143
9	Statique	145
9.1	Degrés de liberté	146
9.2	Moments de forces, bras de leviers	147
9.2.1	Moment de force	151
9.2.2	Couple	153
9.2.3	Levier et avantage mécanique	154
9.3	Equilibre statique	158
9.3.1	Résultante des forces	158

9.3.2	Moment résultant	159
9.3.3	Centre de masse, stabilité	160
9.4	Applications de la statique	163
10	Dynamique du point	164
10.1	Lois de Newton	164
10.1.1	La masse redéfinie	165
10.1.2	Masse volumique, densité, force, poids	166
10.1.3	Les 3 lois de Newton : inertie, force et accélération, action et réaction	171
10.2	Mouvements particuliers et gravitation	178
10.2.1	Mouvement rectiligne uniforme (MRU)	178
10.2.2	Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)	179
10.2.3	Mouvement circulaire uniforme (MCU)	180
10.2.4	Mouvement circulaire accéléré : cas général	183
10.2.5	La parabole de tir (MRU + MRUA)	184
10.2.6	chute libre d'un corps avec frottements	186
10.2.7	La parabole de tir avec frottements	189
10.2.8	Poids et forces de gravitation	191
10.3	Lois de Kepler et applications de la dynamique	193
10.3.1	Forme newtonienne de la troisième loi de Kepler	196
10.3.2	Application : Découverte de nouveaux corps célestes	196
11	Travail, puissance, énergie	197
11.1	Travail	197
11.1.1	Cas particuliers	198
11.2	Energie	199
11.2.1	Energie potentielle de pesanteur	200
11.2.2	Energie cinétique	200
11.2.3	Autres formes d'énergie	202
11.3	Puissance	204
11.3.1	Puissance d'une force	206
11.3.2	Puissance d'un couple	206
11.4	Conversion énergie(s) - travail	206
11.4.1	Loi de conservation	206
11.4.2	Loi de transformation de l'énergie mécanique	207
11.5	Application : Exemple de la chute d'un corps	208
12	Mécanique relativiste et mécanique quantique	209
12.1	Mécanique quantique	209
12.1.1	Paradoxes de la mécanique quantique : le chat de Schrodinger	210
12.2	Mécanique relativiste	211
12.2.1	Dilatation du temps	212
12.2.2	Contraction des longueurs	213
12.2.3	Relativité de la simultanéité : le paradoxe du train	213

V Mécanique des fluides	215
13 Mécanique des fluides parfaits (non visqueux)	217
13.1 Principe d'Archimède	217
13.1.1 Formulation du théorème d'Archimède et idée de démonstration	219
13.1.2 Exemple d'un solide entièrement immergé	221
13.1.3 Exemple d'un solide flottant à la surface d'un liquide	221
13.1.4 Autres exemples d'application de la Poussée d'Archimède	222
13.2 Pression	224
13.3 Écoulement laminaire	225
13.4 Equation de continuité	228
13.5 Equation de Bernoulli	229
13.5.1 Conséquences statiques de l'équation de Bernoulli	231
13.5.2 Conséquences dynamiques de l'équation de Bernoulli	233
14 Écoulement des fluides visqueux	235
14.1 Viscosité	235
14.2 Écoulement laminaire dans un tube : loi de Poiseuille	238
14.3 Nombre de Reynolds	239
14.3.1 Exemples	241
14.3.2 Remarque : la similitude des fluides	242
14.4 Écoulement dans un tuyau : facteur de friction - Équation de Darcy-Weisbach	242
14.5 Loi de Stokes et sédimentation	243
14.5.1 Calcul de la vitesse de sédimentation	244
15 Propriétés dues aux interactions moléculaires	245
15.1 Tension superficielle	245
15.1.1 Existence d'une tension superficielle	245
15.1.2 Interprétation moléculaire	246
15.1.3 Tension superficielle : définition	248
15.2 Capillarité	250
15.2.1 Tube capillaire	250
15.2.2 Forme du ménisque	251
15.2.3 Loi du Jurin	252
15.2.4 Exemples et applications	254
VI Exercices	257
16 Les mesures	258
16.1 Unités	258
16.2 Incertitude absolue et relative : les bases	259
16.3 Incertitude absolue et relative : exercices complémentaires	261
16.4 Chiffres significatifs	262
16.5 Conduite des calculs : intervalle de confiance	263

16.6 Exercices récapitulatifs	264
16.7 Coefficient $t_{\alpha,n}$ de Student pour un niveau de confiance α	265
17 Optique	266
17.1 Réfraction	266
18 Mécanique rationnelle	270
18.1 Calcul vectoriel	270
18.2 Cinématique	272
18.2.1 Vitesse et accélération	272
18.2.2 Mouvement rectiligne	274
18.2.3 Chutte d'un corps	276
18.2.4 Mouvement circulaire	277
18.2.5 Mouvement d'un projectile sans frottements (P_{tir})	279
18.2.6 Exercices récapitulatifs	280
18.3 Statique	282
18.3.1 Moments de forces et équilibre des corps solides	282
18.3.2 Centre de gravité	284
18.3.3 Réactions de liaison	285
18.3.4 Exercices récapitulatifs	288
18.4 Dynamique	289
18.4.1 Densité - masse - masse volumique	289
18.4.2 Poids et gravitation	291
18.4.3 Exercices récapitulatifs	292
18.5 Théorèmes énergétiques	293
18.5.1 Travail	293
18.5.2 Energie cinétique et potentielle	294
18.5.3 Puissance	295
18.5.4 Conversion énergie - travail	296
18.5.5 Exercices récapitulatifs	297
19 Mécanique des fluides	300
19.1 Fluides non-visqueux	300
19.1.1 Poussée d'Archimède	300
19.1.2 Equation de continuité	301
19.1.3 Equation de Bernoulli	302
19.1.4 Exercices récapitulatifs	303
19.2 Fluides visqueux	305
19.2.1 Loi de Poiseuille	305
19.2.2 Nombre de Reynolds	306
19.2.3 Sédimentation	306
19.3 Propriétés dues aux interactions moléculaires	307

Première partie

Introduction

Le terme « physique » vient du grec *φυσικη*, signifiant « nature ».

Pour Platon, la physique est une des trois parties de l'enseignement de la philosophie, aux côtés de l'éthique et de la logique. Pour Aristote, la philosophie se divise en la philosophie théorique, la philosophie pratique et la philosophie poétique ; la physique est une des trois parties de la philosophie théorique, aux côtés de la mathématique et de la théologie.

Au XII^e siècle, lorsque le mot est apparu en français ancien, la physique avait un double sens : médecine (ex : un médecin en anglais est un *physician*), et « ce qui se rapporte à la nature » .

À partir de la fin du XV^e siècle, le mot physique a désigné les « connaissances concernant les causes naturelles » et l'on désignait son étude par l'expression « philosophie naturelle ». Les chaires de philosophie naturelle établies dans les anciennes universités créées au XIII^e siècle, comprenaient l'ensemble des sciences de la nature (sciences au sens de connaissance), selon un corpus universitaire qui reposait sur la philosophie d'Aristote (exemple : le titre *La physique* du livre d'Aristote).

Le mot physique a pris son sens moderne, qui est plus restreint que le sens originel, à partir du XVII^e siècle (Galilée, Descartes), et surtout de la physique classique qui est née avec Newton.

La physique moderne et classique se basent sur des modèles conceptuels, formalisés mathématiquement, permettant de modéliser et de décrire certains phénomènes. Cependant, si la prédiction dérivée du modèle mathématique ne concorde pas avec l'observation ou le bon sens, il y a lieu de revoir sa copie. S'il n'y a pas d'erreur dans le traitement mathématique, il y a lieu de remettre en cause les passerelles entre le modèle et le monde réel, c'est-à-dire revoir l'interprétation de la conclusion mathématique ou, plus fondamentalement, remettre en cause la modélisation utilisée, ce qui conduit parfois à élaborer une nouvelle théorie.

La modélisation d'un phénomène physique est une étape cruciale et très délicate. Traduire le problème en termes mathématiques exige une bonne maîtrise des mathématiques. Mais ce n'est pas toujours suffisant. En effet, un cours de physique n'a rien d'un catéchisme. Idéalement la mémoire ne joue qu'un rôle secondaire dans l'étude d'un tel cours, car tout s'explique et se justifie.

Dans la plupart des problèmes physiques proposés lors d'un cours ou dans un livre, le « bon problème » est celui qui n'admet qu'une seule solution obtenue obligatoirement à partir de toutes les données mentionnées dans le problème. La physique se réduit donc ici à un simple ordonnancement des valeurs en tenant compte des considérations techniques. Le manuel de physique descend au niveau d'un livre de recettes de cuisine, ne laissant aucune place à la créativité et ne proposant que des mets prémâchés ou même prédigérés.

La physique nous permet pourtant de voir la nature d'une façon différente. Peu de personnes font l'effort de comprendre comment et pourquoi cela tel événement se passe ainsi. La physique se propose de répondre à la question du comment, le pourquoi étant laissé à l'appréciation des convictions de chacun.

Cependant, la véritable connaissance de la physique élémentaire est rare, la majorité des gens ne s'intéressent qu'aux dernières découvertes relatées dans des revues de vulgarisation scientifique. On s'y soucie généralement peu de combler les lacunes au niveau des connaissances de base. Il est désagréable de revenir sur les notions élémentaires de la physique dont bien des gens ne gardent qu'un souvenir triste et pétrifié de ce qu'ils ont entendu sur les bancs de l'école.

L'histoire de la physique semble montrer qu'il est illusoire de penser que l'on finira par trouver un corpus fini d'équations qu'on ne pourra jamais contredire par expérience. Chaque théorie acceptée à une époque finit par révéler ses limites, et est intégrée dans une théorie plus large. La théorie newtonienne de la gravitation est valide dans des conditions où les vitesses sont petites et que les masses (ou de façon équivalente en relativité, les énergies) mises en jeu sont faibles, mais lorsque les vitesses approchent la vitesse c de la lumière ou que les masses deviennent importantes, elle doit céder la place à la relativité générale. Par ailleurs, celle-ci est incompatible avec la mécanique quantique lorsque l'échelle d'étude est microscopique et dans des conditions d'énergie très grande (par exemple au moment du Big Bang ou alors au voisinage d'une singularité à l'intérieur d'un trou noir) et sans doute finira par être intégrée elle aussi dans un modèle plus vaste.

La physique trouve donc sa limite et son permanent renouveau naît dans l'impossibilité évidente d'atteindre un état de connaissance parfait et sans faille du réel. De nombreux philosophes, dont Emmanuel Kant, ont mis en garde contre toute croyance que la connaissance humaine des phénomènes peut coïncider avec le réel, s'il existe. Il convient cependant de garder à l'esprit que la physique ne décrit pas le monde, que ses conclusions ne portent pas sur le monde lui-même, mais sur le modèle qu'on déduit des quelques paramètres étudiés. La physique est une science exacte en ce que la base des hypothèses et paramètres considérés conduisent de façon exacte aux conclusions tirées, il n'est pas question en l'occurrence de décrire le monde de façon exacte et exhaustive.

La physique étant écrite en termes mathématiques, elle a depuis sa naissance eu des relations plus que profondes avec les mathématiques. Jusqu'au XX^e siècle, les mathématiciens étaient d'ailleurs la plupart du temps physiciens (et souvent philosophes). De ce fait la physique a très souvent été la source de développements profonds en mathématiques. Par exemple, le calcul différentiel, a été inventé indépendamment par Leibniz et Newton pour comprendre la dynamique en général, et la gravitation universelle en ce qui concerne le second. Le développement en série de Fourier, qui est devenu une branche à part entière de l'analyse, a été inventé par Joseph Fourier pour comprendre la diffusion de la chaleur.

Ces séduisantes séries de Fourier ont d'ailleurs été utilisées, à tort, pendant quelques années pour prédire la diffusion de la chaleur dans une barre ou une plaque de métal, jusqu'à ce que quelqu'un se décide à faire une mesure pour vérifier la cohérence du modèle utilisé.

L'objectif de ce cours est donc d'éveiller à la réflexion et à l'esprit critique en ce qui concerne la cohérence des résultats obtenus lors d'un exercice ou d'une mesure. Par exemple, un pot de fleur qui tombe de dix mètres de haut n'atteindra jamais $\text{mach } 5$.

Le cours débute donc par une étude des différentes unités utilisées en physique, ainsi que sur le calcul

d'erreur. Nous étudierons ensuite l'optique géométrique, essentielle à la compréhension du fonctionnement d'appareils comme le microscope par exemple. Nous aborderons ensuite la mécanique rationnelle et, finalement, la mécanique des fluides.



FIG. 1 – Une polémique date de 1992 : un mathématicien clame qu'un pont distordu serait moins vulnérable aux oscillations dues au vent. Le projet n'a jamais abouti pour cause de bon sens.

Pour conclure, la physique ne peut que s'ériger sur des bases solides, dont certaines, comme les mathématiques, sont abstraites et d'un abord parfois difficile. Cependant, le paysage à découvrir mérite certainement les efforts que vous aurez fournis. Courage !

Deuxième partie

Les mesures

Chapitre 1

Les unités

La physique, comme beaucoup d'autres sciences, est basée essentiellement sur des mesures quantitatives. Ces mesures doivent être corrélées ou interprétées d'une manière ou d'une autre. Souvent les résultats expérimentaux sont comparés à des prévisions théoriques.

Dans la mesure où la théorie et l'expérience sont en accord, nous disons que nous comprenons le phénomène en cause. Une discussion quantitative du mouvement requiert des mesures de temps et des mesures d'espaces parcourus.

Nous devons donc tout d'abord considérer les grandeurs étalon, les unités et les erreurs qui sont associées à des mesures physiques.

On effectue des mesures quantitatives de grandeurs physiques par comparaison avec des grandeurs qui sont prises comme références et qui constituent des grandeurs étalon. Par exemple, si vous dites qu'un cours a duré 59 minutes, cela signifie que la leçon s'est poursuivie pendant un temps qui correspond à un nombre déterminé de tic-tac de l'horloge. Ici, la quantité mesurée a la dimension d'un temps. L'unité de mesure est la minute et l'horloge est l'étalon. Il s'agit d'un étalon secondaire puisque la minute n'est pas définie par les propriétés de cette horloge particulière. Les appareils de mesure sont calibrés soit directement, soit indirectement par rapport à des étalons primaires de longueur, de temps et de masse reconnus par la communauté scientifique internationale.

Ces étalons primaires sont redéfinis, de temps à autre, au fur et à mesure que les mesures deviennent plus précises. Par exemple, l'unité de longueur, le mètre, a été définie en 1889 comme étant la longueur d'une barre particulière de platine iridié. Cette barre a été conservée dans des conditions bien précises. Cet étalon a cependant été abandonné en 1960 parce que sa préservation et sa copie n'étaient pas pratiques et pouvaient entraîner des inexactitudes. La longueur étalon est maintenant définie à partir de la longueur d'onde de la lumière rouge que les atomes de krypton 86 émettent lorsqu'ils sont placés dans une décharge électrique. Des étalons ont également été redéfinis pour les unités de temps et de masse.

Ce n'est pas par hasard que les étalons ont été choisis pour la longueur, le temps et la masse. Toutes les autres grandeurs mécaniques peuvent en effet s'exprimer sous forme d'une combinaison de ces trois dimensions fondamentales que nous représentons par les lettres L , T et M .

1.1 Systèmes d'unités

Peu après l'époque de la révolution française et de la mode des décoltés, les unités métriques ont été introduites dans nos contrées et sont toujours utilisées dans la vie quotidienne, sauf dans les pays anglo-saxons où les unités anglaises restèrent longtemps en usage. Les pays du Commonwealth ont finalement décidé il y a quelques années d'adopter le système métrique, même si pour certains, la reconversion est lente et douloureuse. Pour les travaux scientifiques, cependant, les unités métriques sont mondialement reconnues.

Dans ce cours, nous n'utiliserons que les unités du système international (*S.I.*), c'est-à-dire l'ensemble des unités métriques acceptées internationalement, comme le mètre, le kilogramme et la seconde, qui sont respectivement les unités fondamentales de longueur, de masse et de temps.

On trouvera, dans des documents plus anciens, des références à une version antérieure de ce système d'unités qui était appelé le système d'unités *m.k.s.* pour mètre, kilo, seconde. Les textes plus vieux encore utilisaient parfois les unités du système *c.g.s.* pour centimètre, gramme, seconde.

Remarquons que les valeurs mesurées peuvent être beaucoup plus grandes ou petites que l'étalon. Pour cette raison, on utilise souvent des multiples ou des sous-multiples des unités du *S.I.* qui sont des puissances de dix de ces unités. Par exemple, l'épaisseur d'une page fait approximativement 0,1 millimètre, soit 100 microns.

Les préfixes du système international d'unités simplifient la manipulation des mesures qui ont des rapports élevés d'unité (par exemple, de 0,1 cm à 1000 m). Ces préfixes renvoient à des multiples et des fractions de 10 ou de 1000.

10^N	Préfixe	Symbole	Multiplicateur	10^N	Préfixe	Symbole	Multiplicateur
10^{24}	yotta	<i>Y</i>	Quadrillion	10^0	unité	—	Un, une
10^{21}	zetta	<i>Z</i>	Trilliard	10^{-1}	déci	<i>d</i>	Dixième
10^{18}	exa	<i>E</i>	Trillion	10^{-2}	centi	<i>c</i>	Centième
10^{15}	péta	<i>P</i>	Billiard	10^{-3}	milli	<i>m</i>	Millième
10^{12}	téra	<i>T</i>	Billion	10^{-6}	micro	μ	Millionième
10^9	giga	<i>G</i>	Milliard	10^{-9}	nano	<i>n</i>	Milliardième
10^6	méga	<i>M</i>	Million	10^{-12}	pico	<i>p</i>	Billionième
10^3	kilo	<i>k</i>	Mille	10^{-15}	femto	<i>f</i>	Billiardième
10^2	hecto	<i>h</i>	Cent	10^{-18}	atto	<i>a</i>	Trillionième
10^1	déca	<i>da</i>	Dix	10^{-21}	zepto	<i>z</i>	Trilliardième
10^0	unité	—	Un, une	10^{-24}	yocto	<i>y</i>	Quadrillionième

1.2 Equations aux dimensions

Les équations aux dimensions sont des équations symboliques permettant de relier, grâce aux lois physiques, les unités dérivées aux unités de base. Par exemple, soit l'équation fondamentale de la mécanique :

$$F = m \cdot a$$

On écrit symboliquement : les dimensions de la force F sont $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$. Donc, en ce qui concerne l'unité, on aura, dans le cas d'une force

$$1 \text{ unité de force} = 1 \text{ kg} \frac{m}{s^2}$$

Bien entendu, l'unité de force est le Newton.

1.3 Tableau des unités du système international

Un système d'unités est composé d'unités de base et d'unités dérivées. Les unités de base sont choisies arbitrairement. Les unités dérivées sont déduites des unités de base. En Belgique, les unités légales sont constituées, notamment, par les unités du *S.I.* à l'exception du degré Celsius qui est une unité légale belge, bien que l'unité de température du *S.I.* soit le degré Kelvin.

Le système international comprend sept unités de base indépendantes (ou unités fondamentales) à partir desquelles sont obtenues par analyse dimensionnelle toutes les autres unités, ou unités dérivées.

Ces unités sont supposées indépendantes dans la mesure où elles permettent de mesurer des grandeurs physiques indépendantes.

Les définitions des unités de base du système international utilisent des phénomènes physiques reproductibles. Seul le kilogramme est encore défini par rapport à un objet matériel susceptible de s'altérer. Actuellement, des recherches ont donc lieu pour remplacer cette définition par une autre, utilisant cette fois un phénomène physique. À l'issue de ces recherches, le kilogramme pourrait perdre son statut d'unité de base au profit d'une autre unité : c'est en effet seul le nombre d'unités fondamentales qui est imposé, puisqu'elles doivent permettre, par combinaison, de mesurer toute grandeur physique connue sans définition redondante, mais le choix précis des unités fondamentales comme les unités de masse, longueur, temps, courant électrique, température, intensité lumineuse et quantité de matière est purement arbitraire.

Grandeur	Symbole	Nom de l'unité	Symbole de l'unité
longueur	l	mètre	m
masse	m	kilogramme	kg
temps	t	seconde	s
courant électrique	I	ampère	A
température	T	kelvin	K
quantité de matière	n	mole	mol
intensité lumineuse	IV	candela	cd

Le nom des unités de base et dérivées est un nom commun même si l'unité dérive d'un nom propre. La première lettre du nom d'une unité est donc toujours une minuscule. On écrit ainsi ampère, seconde et degré Celsius (ce n'est ici pas la première lettre qui est une majuscule). Par ailleurs, pour former les noms des unités multiples et sous-multiples, les préfixes sont simplement accolés. Enfin, en cas de produit d'unités, on utilise un tiret ou un espace dans le nom de l'unité dérivée. Ainsi, les bonnes orthographes de l'unité dont le symbole est *kWh* sont kilowatt-heure et kilowatt heure. On ne peut pas accoler plusieurs préfixes à une unité (nanomètre mais pas millimicromètre).

Les symboles des unités commencent par une minuscule si l'unité ne dérive pas d'un nom propre. En revanche, dans le cas contraire, le symbole d'une unité commence par une majuscule. Ainsi on peut comparer les symboles du pascal (*Pa*) et de la seconde (*s*). Le symbole du litre constitue une exception notable à cette règle puisqu'il est au choix *l* ou *L*, pour éviter les confusions avec le chiffre 1.

Les symboles des unités sont toujours des caractères romains quelle que soit la police du texte où ils figurent. Ils constituent des entités mathématiques et non des abréviations, ainsi on écrit *30cm* et pas *30cm.* ou *30cms.* Les abréviations des symboles et noms d'unités (telles *sec* pour la seconde (*s*) ou *cc* pour le centimètre cube (*cm³*)) sont prohibées. Il ne faut pas mélanger les symboles (entités mathématiques) et les noms des unités, ainsi on écrira toujours newton par kilogramme et jamais newton par *kg*. Enfin les notations de la division et de la multiplication s'appliquent aux symboles des unités dérivées : ainsi on peut écrire le symbole du mètre par seconde $m \cdot s^{-1}$, *m/s* ou $\frac{m}{s}$ et celui du kilowatt-heure *kWh* ou *kWh*. À noter également que pour éviter les notations ambiguës, on n'utilise jamais plus d'une barre oblique dans le symbole d'une unité : *A/m/s* pourrait être le symbole de l'ampère par mètre et par seconde ($A \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ ou $\frac{A}{m \cdot s}$) ou celui de l'ampère seconde par mètre ($A \cdot m^{-1} \cdot s$ ou $A \cdot \frac{s}{m}$).

1.4 Définition des unités de base

Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $\frac{1}{299\,792\,458}$ de seconde. Historiquement, la première définition officielle et pratique du mètre (1791) était basée sur la circonférence de la terre, et valait $\frac{1}{40\,000\,000}$ d'un méridien. Auparavant, le mètre en tant que proposition d'unité décimale de mesure universelle était défini comme la longueur d'un pendule qui oscille avec une demi-période d'une seconde.

Le kilogramme (au départ nommé le grave) est égal à la masse du prototype international du kilogramme. Ce dernier, composé d'un alliage de platine et d'iridium (90%-10%), est conservé au Bureau international des poids et mesures à Sèvres, en France. Historiquement, la définition du kilogramme était la masse d'un décimètre cube (soit d'un litre) d'eau.

La seconde est la durée de $9\,192\,631\,770$ périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 à la température de 0 kelvin. La seconde était à l'origine basée sur la durée du jour terrestre, divisé en 24 heures de 60 minutes, chacune d'entre elles durant 60 secondes (soit $86\,400$ secondes pour une journée).

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de un mètre l'un de l'autre dans le vide produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur.

Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction $1/273,16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12. Ce nombre d'entités élémentaires est appelé nombre d'Avogadro. Lorsque l'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules.

La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de $1/683$ watt par stéradian.

Certaines unités fondamentales utilisent d'autres unités fondamentales dans leur définition, parfois via des unités dérivées (la définition de la seconde utilise par exemple celle du kelvin). Les unités fondamentales ne sont donc pas stricto sensu indépendantes les unes des autres, mais ce sont les grandeurs physiques qu'elles permettent de mesurer qui le sont.

Chapitre 2

Erreurs et incertitudes de mesure

2.1 Généralités

Le calcul d'erreur, ou calcul d'incertitudes est un ensemble de techniques permettant d'estimer l'erreur faite sur un résultat numérique, à partir des incertitudes ou des erreurs faites sur les mesures qui ont conduit à ce résultat. Ceci permet donc d'estimer la propagation des erreurs.

L'erreur de mesure détermine la sensibilité (Capacité à sélectionner les bons « candidats ») et la sélectivité (capacité à éliminer les mauvais « candidats ») d'une méthode.

Le calcul d'incertitude permet d'évaluer correctement les erreurs qui se produisent lors de mesures liées à la vérification d'une relation entre différentes grandeurs physiques. Les instruments de mesure n'étant pas de précision infinie, les mesures faites pendant une expérience ne sont pas exactes. Il faut donc évaluer ces incertitudes pour répondre à la question : « la relation n'est pas vérifiée exactement parce qu'elle est fautive ou parce que les mesures sont incertaines ? » On en déduit des marges d'erreurs, en dehors desquelles la relation sera invalidée. Cela fait partie intégrante de la méthode scientifique.

Il faut considérer trois sources d'erreur (uncertainty en anglais) :

1. la précision de la mesure Δ_1 , ou l'incertitude (resolution en anglais) ;
2. la dispersion statistique Δ_2 (precision en anglais) ;
3. l'erreur systématique Δ_3 (accuracy en anglais).

L'erreur totale étant

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

Si l'on fait la comparaison avec des flèches que l'on tire sur une cible :

1. la précision de mesure (resolution) désigne la taille de la pointe de la flèche ;
2. la dispersion statistique (precision) désigne le fait que les flèches sont proches les unes des autres, ou bien au contraire éparpillées sur la cible ;

3. l'erreur systématique (accuracy) indique si les flèches visaient bien le centre, ou bien un autre point de la cible.

2.1.1 Erreur et incertitude relative et absolue

L'**erreur absolue** mesure l'imprécision sur une mesure que nous effectuons. Elle est appelée absolue, car elle est le résultat de la valeur absolue de la différence entre la valeur réelle de la grandeur que l'on mesure et une valeur de référence que nous avons choisie comme une bonne approximation de celle-ci. Elle est donc toujours un nombre positif. Par exemple, si nous souhaitons mesurer une longueur uniquement en centimètres et que la longueur mesurée est supérieure ou inférieure de moins de $0,5\text{cm}$ à une valeur de référence α en centimètres, l'erreur absolue est donnée par $|\alpha - x| = |x - \alpha| = \delta\alpha$. Ici x est la valeur réelle de la longueur mesurée et donc $\alpha - 0,5 \leq x < \alpha + 0,5$. On utilise l'erreur absolue pour calculer l'erreur relative.

Dans les sciences expérimentales, l'**erreur relative** est le rapport de l'erreur absolue sur la valeur de cette grandeur. L'erreur relative sur la grandeur a vaut $\frac{\Delta a}{a}$.

L'**incertitude absolue** Δl est égale à la demi unité du dernier rang affiché. On caractérise la précision d'une mesure par l'incertitude $\frac{\Delta l}{l}$ où l est une mesure. Elle est très peu utilisée, car il a été pris comme convention d'écrire l'incertitude absolue avec un seul chiffre (ce chiffre est dit significatif).

L'**incertitude relative** est utilisée pour le calcul l'incertitude sur un produit ou un quotient et de l'incertitude sur une puissance C'est le rapport de l'incertitude absolue sur le résultat de la mesure. Elle indique la précision de la mesure. L'incertitude relative est exprimée en pourcentage.

On a donc : incertitude relative = $|\text{valeur expérimentale} - \text{valeur théorique}| / \text{valeur expérimentale}$ (à multiplier par 100 pour l'avoir en pourcentage)

2.1.2 Erreur systématique et incertitude accidentelle

L'**erreur systématique** comprend des phénomènes comme l'erreur d'échantillonnage, l'erreur de préparation ; ces problèmes peuvent introduire une dispersion statistique (cf. ci-dessus) ou bien un décalage des résultats si l'erreur commise est toujours la même.

Les appareils dérivent avec le temps, ce qui rend nécessaire leur ré-étalonnage régulier. On peut avoir une très faible dispersion statistique, et avoir toutefois un résultat faux...

On peut aussi tout simplement mesurer un paramètre qui ne représente pas de manière pertinente ce que l'on veut évaluer. Par exemple, en économie, le produit intérieur brut par habitant est un mauvais estimateur du développement d'un peuple. Dans un sondage d'opinion, la question peut orienter la réponse.

L'**incertitude accidentelle** est due au hasard. Elle est inévitable. C'est l'incertitude inhérente à chaque mesure provenant de l'impression de la mesure ou provenant de l'observateur. En effectuant

plusieurs fois la même mesure, nous pouvons trouver des résultats différents et plusieurs observateurs mesurant une même grandeur obtiendraient également des résultats différents.

L'incertitude statistique traduit la fidélité de l'instrument.

2.1.3 Précision d'un appareil

La qualité métrologique d'un appareil de mesure est l'ensemble des caractéristiques qui fera qu'un appareil de mesure effectuera les mesures avec la qualité correspondante à l'attente de l'utilisateur.

Un appareil est précis s'il fournit un résultat exact et reproductible. La précision d'une mesure dépend de la précision et donc de la qualité des appareils utilisés mais aussi de l'habileté de l'expérimentateur. Un instrument de mesure est donc d'autant plus précis que les résultats de mesure qu'il indique coïncident avec la valeur vraie (par définition théorique) que l'on cherche à mesurer.

La précision est plus aisée à définir par l'erreur de précision. Elle s'exprime en unité de grandeur (erreur absolue) ou en pourcentage (erreur relative).

En dehors des conditions opératoires, la précision d'un appareil est essentiellement lié à deux types de caractéristiques : la **justesse** et la **fidélité**. Un appareils est précis s'il est à la fois juste et fidèle.

La précision d'appareil de mesure peut également être entachée par des causes extérieures : erreur opératoire, erreur provoquée par les grandeurs d'influences (température, pression etc), erreur de référence ou d'étalonnage, erreur d'hystérésis, erreur de finesse etc.

L'erreur de **justesse** est l'erreur globale résultant de toutes les causes pour chacun des résultats de mesure pris isolément. C'est donc l'aptitude de l'appareil à donner des résultats qui ne sont pas entachés d'erreur.

La **fidélité** est l'aptitude d'un appareil de mesure à donner des mesures exemptes d'erreurs accidentelles. La fidélité définit la dispersion des résultats. Si on n'effectue qu'une seule mesure, la fidélité représente la probabilité qu'elle soit représentative du résultat moyen.

2.2 Calcul d'incertitudes

Le calcul de l'incertitude permet d'évaluer correctement les erreurs qui se produisent lors de mesures liées à la vérification d'une relation entre différentes grandeurs physiques. En effet, les instruments de mesure n'étant pas de précision infinie, les mesures faites pendant une expérience ne sont pas exactes.

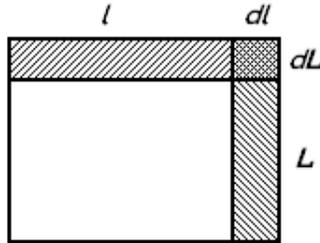
Il faut donc évaluer ces incertitudes pour répondre à la question : « la relation n'est pas vérifiée exactement parce qu'elle est fausse ou parce que les mesures sont incertaines ? »

On en déduit des marges d'erreurs, en dehors desquelles la relation sera invalidée.

Exemple : surface d'un rectangle

La surface S d'un rectangle est donnée par le produit de sa largeur L et de sa longueur l . On a donc $S = L.l$. Si les côtés deviennent $L + dL$ et $l + dl$ où dL et dl représentent respectivement un petit accroissement de la largeur et de la longueur, la nouvelle surface S' vaudra

$$S' = (L + dL)(l + dl) = L.l + l.dL + L.dl + dL.dl$$



Etant donné que la quantité $dl.dL$ est négligeable par rapport aux quantités $L.l$, $l.dL$ et $L.dl$, on aura

$$S' = L.l + l.dL + L.dl + dL.dl \approx L.l + L.dl + l.dL$$

et la variation de surface s'écrira finalement

$$dS = S' - S \approx L.dl + l.dL$$

Exemple : volume d'un parallélépipède

Le volume V d'un parallélépipède est donné par le produit de sa largeur L , de sa longueur l et de sa hauteur h . On a donc $V = L.l.h$. Si les côtés deviennent $L + dL$, $l + dl$ et $h + dh$ où dL , dl et dh représentent respectivement un petit accroissement de la largeur, de la longueur et de la hauteur, le nouveau volume V' vaudra

$$V' = (L + dL)(l + dl)(h + dh) = L.l.h + L.l.dh + l.h.dL + L.h.dl + L.dl.dh + l.dL.dh + h.dL.dl + dL.dl.dh$$

Etant donné que les quantités $L.dl.dh$, $l.dL.dh$, $h.dL.dl$ et $dL.dl.dh$ sont négligeables par rapport aux quantités $L.l.h$, $L.l.dh$, $L.h.dl$ et $l.h.dL$, on aura

$$V' = L.l.h + l.h.dL + L.h.dl + L.l.dh + L.dl.dh + l.dL.dh + h.dL.dl + dL.dl.dh \approx L.l.h + l.h.dL + L.h.dl + L.l.dh$$

et la variation de volume s'écrira finalement

$$dV = V' - V \approx l.h.dL + L.h.dl + L.l.dh$$

2.2.1 Utilisation des dérivées partielles

Plus généralement, pour le calcul de la variation d'une fonction $f(x, y, z)$.

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \text{dérivée partielle de } f \text{ par rapport à } x$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ s'effectue en dérivant f par rapport à x et en considérant les autres variables (y et z par exemple) comme des constantes.

On a aussi

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz$$

Exemple : surface d'un rectangle

Le calcul de la surface d'un rectangle de côtés L et l : $S = L.l$ devient, lorsque les côtés deviennent $L+dL$ et $l+dl$, on a $dS = (L+dL)(l+dl) - L.l = L.dl + l.dL + dL.dl$ que l'on approche par $dS = L.dl + l.dL$ car $dL.dl$ est négligeable.

Notez que

$$dS = \frac{\partial(L.l)}{\partial L} dL + \frac{\partial(L.l)}{\partial l} dl$$

car $\frac{\partial(L.l)}{\partial L} = l$ et $\frac{\partial(L.l)}{\partial l} = L$. Donc,

$$dS = \frac{\partial S(L, l)}{\partial L} dL + \frac{\partial S(L, l)}{\partial l} dl$$

Exemple : volume d'un parallépipède

De même la variation de volume d'une boîte de côtés x , y et z de volume $V = xyz$:

$$V' = (x + dx)(y + dy)(z + dz) = x.y.z + dx.y.z + x.dy.z + x.y.dz + x.dy.dz + y.dx.dz + z.dx.dy + dx.dy.dz$$

qui peut s'écrire $dV = V' - V = dx.y.z + x.dy.z + x.y.dz + x.dy.dz + y.dx.dz + z.dx.dy + dx.dy.dz$ et que l'on approche par $dV = y.z.dx + z.x.dy + x.y.dz$

Noter que

$$dV = yzdx + zxdy + xydz = \frac{\partial(xyz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(xyz)}{\partial y} dy + \frac{\partial(xyz)}{\partial z} dz$$

car : $\frac{\partial(xyz)}{\partial x} = yz$; $\frac{\partial(xyz)}{\partial y} = xz$; $\frac{\partial(xyz)}{\partial z} = xy$. Donc,

$$dV = \frac{\partial(xyz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(xyz)}{\partial y} dy + \frac{\partial(xyz)}{\partial z} dz = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} dz$$

Exemple : loi des gaz parfaits $p = \frac{nRT}{V}$

On a

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial n} dn + \frac{\partial p}{\partial R} dR + \frac{\partial p}{\partial T} dT + \frac{\partial p}{\partial V} dV \\ &= \frac{RT}{V} dn + \frac{nR}{V} dT + \frac{nT}{V} dR - \frac{nRT}{V^2} dV \end{aligned}$$

L'erreur la plus grande s'obtient évidemment lorsque tous les termes s'ajoutent. On a dès lors, en passant d'une quantité infinitésimale dp à une erreur réelle Δp , le résultat suivant

$$\Delta p = \frac{RT}{V} \Delta n + \frac{nT}{V} \Delta R + \frac{nR}{V} \Delta T + \frac{nRT}{V^2} \Delta V$$

qui nous donne l'erreur absolue que l'on commet sur la pression, connaissant les erreurs absolues que l'on commet sur

- le nombre de moles n : Δn ,
- la constante des gaz R : ΔR ,
- la température T : ΔT et
- le volume V : ΔV .

Dès lors, l'incertitude absolue sur la pression sera donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{p} &= \frac{\frac{RT}{V} \Delta n}{\frac{nRT}{V}} + \frac{\frac{nT}{V} \Delta R}{\frac{nRT}{V}} + \frac{\frac{nR}{V} \Delta T}{\frac{nRT}{V}} + \frac{\frac{nRT}{V^2} \Delta V}{\frac{nRT}{V}} \\ &= \frac{RT}{V} \frac{V}{nRT} \Delta n + \frac{nT}{V} \frac{V}{nRT} \Delta R + \frac{nR}{V} \frac{V}{nRT} \Delta T + \frac{nRT}{V^2} \frac{V}{nRT} \Delta V \\ &= \frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta V}{V} \end{aligned}$$

2.2.2 Mesures directes et indirectes

Les dérivées partielles peuvent sembler d'emploi compliqué pour certains, aussi nous allons établir par une autre méthode les formules permettant d'estimer l'incertitude qui affecte une grandeur déterminée indirectement.

Par exemple, une mesure de distance prise avec une latte est une mesure directe. La mesure d'une surface avec une latte est une mesure indirecte car l'on utilise pas d'étalon de mesure de surface mais bien un étalon de mesure de distance.

L'erreur directe est due à un mauvais calibrage (précision de l'appareil, ici la latte) ou à une mauvaise lecture de l'oeil qui commet, au maximum, un erreur d'une demi unité (si la latte est graduée au millimètre, l'oeil peut commettre une erreur d'un demi millimètre).

Si A' est la valeur réelle de la grandeur à mesurer, A la valeur mesurée et ΔA l'incertitude absolue sur A , alors $A' \in]A - \Delta A, A + \Delta A[$ et dès lors, il vient

$$A - \Delta A < A' < A + \Delta A$$

ce qui signifie que la valeur réelle A' (inconnue) se trouve dans un intervalle centré sur la valeur mesurée A et de largeur $2\Delta A$.

Dans le cas indirect, il faut considérer plusieurs mesures A, B, \dots qu'on supposera indépendantes.

Incertainitude sur une somme

Soient ΔA et ΔB les incertitudes absolues sur les grandeurs mesurées A et B . Que vaut l'incertitude absolue ΔS si $S = A + B$?

On a

$$\begin{array}{rcccl} A - \Delta A & < & A' & < & A + \Delta A \\ B - \Delta B & < & B' & < & B + \Delta B \\ \hline A + B - (\Delta A + \Delta B) & < & A' + B' & < & A + B + (\Delta A + \Delta B) \\ \hline S - \Delta S & < & S' & < & S + \Delta S \end{array}$$

Donc,

$$\Delta(A + B) = \Delta A + \Delta B$$

L'incertitude relative sur la grandeur S nous est donnée par le rapport $\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta A + \Delta B}{A + B} = \frac{\Delta A}{A + B} + \frac{\Delta B}{A + B}$.

Remarquons que $\Delta(2A) = \Delta(A + A) = \Delta A + \Delta A = 2\Delta A$ et que dès lors, on a aussi, avec k étant une constante réelle, que

$$\Delta(kA) = k\Delta A$$

Incertainitude sur une différence

Le cas de la différence n'est pas très différent. Soient ΔA et ΔC les incertitudes absolues sur les grandeurs mesurées A et C . Que vaut l'incertitude absolue ΔS si $S = A - C$?

Effectuons tous d'abord le petit changement suivant :

$$C - \Delta C < C' < C + \Delta C \Leftrightarrow -C + \Delta C > -C' > -C - \Delta C$$

Dès lors, il vient

$$\begin{array}{rcccl} A - \Delta A & < & A' & < & A + \Delta A \\ -C - \Delta C & < & -C' & < & -C + \Delta C \\ \hline A - C - (\Delta A + \Delta C) & < & A' - C' & < & A - C + (\Delta A + \Delta C) \\ \hline S - \Delta S & < & S' & < & S + \Delta S \end{array}$$

Donc,

$$\Delta(A - C) = \Delta A + \Delta C$$

Incertitude sur un produit

Soient $\frac{\Delta A}{A}$ et $\frac{\Delta B}{B}$ les incertitudes relatives sur deux grandeurs mesurées A et B . Que vaut l'incertitude relative $\frac{\Delta P}{P}$ si $P = A.B$?

On a

$$\begin{aligned} A - \Delta A < A' < A + \Delta A &\Leftrightarrow A(1 - \frac{\Delta A}{A}) < A' < A(1 + \frac{\Delta A}{A}) \\ B - \Delta B < B' < B + \Delta B &\Leftrightarrow B(1 - \frac{\Delta B}{B}) < B' < B(1 + \frac{\Delta B}{B}) \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} A(1 - \frac{\Delta A}{A})B(1 - \frac{\Delta B}{B}) &< A'.B' < A(1 + \frac{\Delta A}{A})B(1 + \frac{\Delta B}{B}) \\ \Leftrightarrow A.B(1 - \frac{\Delta A}{A} - \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta A.\Delta B}{A.B}) &< A'.B' < A.B(1 + \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta A.\Delta B}{A.B}) \end{aligned}$$

On peut négliger les quantités $\frac{\Delta A.\Delta B}{A.B}$ par rapport aux quantités $\frac{\Delta A}{A}$, $\frac{\Delta B}{B}$ et 1. Il vient alors

$$\frac{A.B(1 - (\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}))}{P(1 - \frac{\Delta P}{P})} < \frac{A'.B'}{P'} < \frac{A.B(1 + \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B})}{P(1 + \frac{\Delta P}{P})}$$

Donc,

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

Remarquons que $\frac{\Delta(A^2)}{A.A} = \frac{\Delta(A.A)}{A.A} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta A}{A} = 2\frac{\Delta A}{A}$ et que dès lors, on a aussi, avec k étant une constante réelle, que

$$\frac{\Delta(A^k)}{A^k} = |k| \frac{\Delta A}{A}$$

Incertitude sur un quotient

Soient $\frac{\Delta A}{A}$ et $\frac{\Delta B}{B}$ les incertitudes relatives sur deux grandeurs mesurées A et B . Que vaut l'incertitude relative $\frac{\Delta Q}{Q}$ si $Q = \frac{A}{C}$?

Effectuons tous d'abord le petit changement suivant :

$$C(1 - \frac{\Delta C}{C}) < C' < C(1 + \frac{\Delta C}{C}) \Leftrightarrow \frac{1}{C(1 - \frac{\Delta C}{C})} > \frac{1}{C'} > \frac{1}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}$$

Dès lors, il vient

$$\begin{aligned} \frac{A(1 - \frac{\Delta A}{A})}{C(1 - \frac{\Delta C}{C})} &< \frac{A'}{C'} < \frac{A(1 + \frac{\Delta A}{A})}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})} \\ \frac{A(1 - \frac{\Delta A}{A})}{C(1 - \frac{\Delta C}{C})} \frac{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})} &< \frac{A'}{C'} < \frac{A(1 + \frac{\Delta A}{A})}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})} \frac{C(1 - \frac{\Delta C}{C})}{C(1 - \frac{\Delta C}{C})} \\ \frac{A(1 - \frac{\Delta A}{A} - \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta A.\Delta C}{A.C})}{C(1 - \frac{(\Delta C)^2}{C^2})} &< \frac{A'}{C'} < \frac{A(1 + \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta A.\Delta C}{A.C})}{C(1 - \frac{(\Delta C)^2}{C^2})} \end{aligned}$$

On peut négliger les quantités $\frac{\Delta A.\Delta C}{A.C}$ et $\frac{(\Delta C)^2}{C^2}$ par rapport aux quantités $\frac{\Delta A}{A}$, $\frac{\Delta B}{B}$ et 1. Il vient alors

$$\frac{\frac{A}{C}(1 - (\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}))}{Q(1 - \frac{\Delta Q}{Q})} < \frac{A'}{C'} < \frac{\frac{A}{C}(1 + \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B})}{Q(1 + \frac{\Delta Q}{Q})}$$

Donc,

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta C}{C}$$

Incertitude : résumé

Soit une grandeur G à mesurer. On recherche son incertitude absolue et relative.

1. Dans le cas d'une somme ou d'une différence : $G = \pm k_a A \pm k_b B \pm k_c C$, où k_a , k_b et k_c sont des constantes numériques, on prend la somme des incertitudes absolues :

$$\Delta G = |k_a| \Delta A + |k_b| \Delta B + |k_c| \Delta C$$

2. Dans le cas d'un produit ou d'un quotient : $G = \kappa \frac{A^{\pm k_a} B^{\pm k_b}}{C^{\pm k_c}}$ où κ , k_a , k_b et k_c sont des constantes numériques, on prend la somme des incertitudes relatives :

$$\frac{\Delta G}{G} = \kappa |k_a| \frac{\Delta A}{A} + \kappa |k_b| \frac{\Delta B}{B} + \kappa |k_c| \frac{\Delta C}{C}$$

Exemple : soit $G = \frac{A^3 B^2}{C^4}$. On a

$$\frac{\Delta G}{G} = 3 \frac{\Delta A}{A} + 2 \frac{\Delta B}{B} + 4 \frac{\Delta C}{C}$$

Donc, par extension,

$$\Delta G = \frac{\Delta G}{G} G = 3 \frac{\Delta A}{A} \frac{A^3 B^2}{C^4} + 2 \frac{\Delta B}{B} \frac{A^3 B^2}{C^4} + 4 \frac{\Delta C}{C} \frac{A^3 B^2}{C^4} = 3 \frac{A^2 B^2}{C^4} \Delta A + 2 \frac{A^3 B}{C^4} \Delta B + 4 \frac{A^3 B^2}{C^5} \Delta C$$

qui peut aussi s'obtenir par la formule $\Delta G = |\frac{\partial G}{\partial A}| \Delta A + |\frac{\partial G}{\partial B}| \Delta B + |\frac{\partial G}{\partial C}| \Delta C$.

2.3 Chiffres significatifs

Dans une mesure physique, le nombre de chiffres significatifs détermine la précision de la mesure. En écriture décimale, c'est le nombre total de chiffres, sans compter les éventuels zéros qui se trouvent « à gauche », c'est-à-dire à gauche du premier chiffre non nul. On peut dire aussi que :

- les chiffres autres que zéro sont toujours significatifs.
- Les zéros sont significatifs lorsqu'ils se trouvent à droite du premier chiffre autre que zéro. Ils ne sont pas significatifs lorsqu'ils se trouvent à la gauche du premier chiffre autre que zéro.

Exemples :

- 0,00**705** *kg* possède 3 chiffres significatifs (en gras)
- 654,0 *s* possède 4 chiffres significatifs

Remarquons que les nombres entiers sont des nombres avec une infinité de chiffres significatifs. Il en va de même de leur inverse.

Il existe 6 règles régissant le comportement à adopter vis-à-vis mesures et des incertitudes et de leurs chiffres significatifs.

1. Il ne faut pas conserver dans le résultat plus de chiffres significatifs que nécessaire.

Par exemple, si une grandeur est affectée d'une incertitude absolue égale à 0,7, il ne faudra conserver que le chiffre des dixièmes : $G = 6,3243 \pm 0,7 = 6,3 \pm 0,7$.

2. Lorsque le premier chiffre supprimé est supérieur ou égal à 5, on augmente d'une unité le dernier chiffre conservé. Par exemple

$$\begin{aligned} G_1 &= 486,871 \pm 0,8 = 486,9 \pm 0,8 \\ G_2 &= 212,750 \pm 0,7 = 212,8 \pm 0,7 \\ G_3 &= 141,547 \pm 0,6 = 141,5 \pm 0,6 \end{aligned}$$

3. Dans les calculs intermédiaires, il suffit de garder 2 chiffres significatifs de plus que le plus petit nombre de chiffres significatif des données.

En effet, lors d'un calcul, les données sont parfois fournies avec des nombres de chiffres significatifs différents. Le résultat du calcul doit alors être exprimé avec le nombre de chiffres significatifs de la donnée qui en possède le moins.

Après une addition ou une soustraction, une multiplication ou une division, le résultat ne doit pas avoir plus de décimales que le nombre qui en comporte le moins. Par exemple

$$\begin{aligned}
 L &= 30,01 \pm 0,14 \text{ mm} \\
 l &= 20,08 \pm 0,12 \text{ mm} \\
 h &= 9,37 \pm 0,13 \text{ mm} \\
 & \quad 3 \text{ chiffres significatifs minimum}
 \end{aligned}$$

Lors du calcul de $V = L.l.h$, on conservera 5 chiffres significatifs pour le réinjecter.

4. Lorsque, par exemple, le nombre π intervient dans les calculs, on prendra les décimales données par la calculette, ce qui convient en général pour négliger l'erreur relative $\frac{\Delta\pi}{\pi}$.

En général, on néglige l'erreur relative sur π si celle-ci est inférieure au dixième de la somme des autres erreurs.

5. L'incertitude absolue ΔG sur une grandeur G déterminée indirectement s'exprime avec 1 ou 2 chiffres significatifs suivant la valeur prise par le premier chiffre.
- On garde 2 chiffres significatifs si le premier chiffre de l'incertitude absolue est < 5 .
 - On garde 1 chiffre significatif si le premier chiffre de l'incertitude absolue est ≥ 5 .

Par exemple,

$\Delta G = 0,72$ devient égal à 7.10^{-1} et $G = 0,78$ devient égal à 8.10^{-1} .

$\Delta G = 2,342$ devient égal à 2,3 et $G = 2,55$ devient égal à 2,6.

$\Delta G = 469,2$ devient égal à $4,7.10^2$ mais $\Delta G = 499,438$ devient égal à $5,0.10^2$ (cas particulier où on garde 2 chiffres alors que le premier est, une fois arrondi, ≥ 5)

6. L'incertitude relative $\frac{\Delta G}{G}$ sur une grandeur mesurée indirectement s'exprime toujours avec 2 chiffres significatifs (car en général, on l'exprime en pourcentage).

2.4 Conduite des calculs et expression des résultats

Lors d'une série de mesures x_i visant à déterminer une vraie valeur x inconnue, ayant obtenu un certain nombre de résultats, on les exprime chacun avec leurs incertitudes de lecture. Cette incertitude de lecture $\Delta_l x$ est donnée par l'appareil ou évaluée par l'expérimentateur.

Néanmoins, considérer l'incertitude de lecture seule n'est pas suffisant. En effet, lorsqu'on répète une même mesure un nombre suffisant de fois, on constate que les fréquences des résultats se répartissent selon une courbe en cloche (normale ou gaussienne).

On peut démontrer, en statistiques et probabilités, que, pour un nombre suffisant de mesures, la valeur probable de la grandeur à mesurer est égale à la moyenne arithmétique des mesures effectuées.

Soit x_1, x_2, \dots, x_n les résultats d'une même mesure réalisée n fois. Soit $\Delta_l x$ l'incertitude de lecture associée aux mesures x_i . Soit \bar{x} la valeur probable de la grandeur mesurée. On a, comme précédemment,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Cependant, dans ce raisonnement, on a fait l'hypothèse tacite que la vraie valeur x de la grandeur à mesurer a une certaine probabilité de se trouver en dehors d'un certain intervalle centré autour de la valeur probable \bar{x} . Cet intervalle s'appelle l'*intervalle de confiance*.

L'intervalle de confiance mesure l'imprécision sur les estimations issues de l'échantillon. Ces imprécisions sont dues aux variations échantillonnales. L'estimation par intervalle de confiance consiste à trouver un intervalle contenant un paramètre (inconnu, x) à estimer avec une probabilité ou niveau de confiance de $1 - \alpha$.

Par exemple, un intervalle de confiance avec $alpha = 95\%$ illustre qu'il y a une probabilité de 5% que, si la vraie valeur se trouve en dehors de l'intervalle défini par $]\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x[$, la probabilité a priori d'apparition résultat de la mesure que l'on a obtenu était inférieure à 5%.

On peut comprendre de manière fautive et non rigoureuse mais plus accessible qu'avec $\alpha = 95\%$, on a 5% de chances pour que la vraie valeur se trouve en dehors de l'intervalle $\bar{x} \pm \Delta x$.

Dans le but de quantifier cette erreur sur l'hypothèse que l'on a fait de supposer que la vraie valeur se trouve dans un intervalle centré autour de la valeur probable \bar{x} , on introduit l'erreur statistique $\Delta_s x$ donnée par

$$\Delta_s x = t_{n-1, \alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

où $t_{n-1, \alpha}$ est le *coefficient de Student* dépendant du nombre de mesures n et du niveau de confiance α souhaité. $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ est la déviation standard ou écart-type de l'échantillon.

Les valeurs du coefficient de student sont données dans des tables (voir exercices).

L'incertitude absolue totale sur la moyenne est égale à la somme des incertitudes statistiques et de lecture, on a finalement

$$\Delta x = \Delta_s x + \Delta_l x$$

Troisième partie

Optique géométrique

L'optique géométrique est une branche de l'optique qui s'appuie notamment sur la notion de rayon lumineux. Cette approche simple permet notamment des constructions géométriques d'images qui lui confèrent son nom.



FIG. 2.1 – Anamorphose à miroir

Du point de vue physique, l'optique géométrique est une approche complémentaire de l'optique ondulatoire (souvent appelée optique physique) et de l'optique quantique. Elle est en revanche plus ancienne, ayant été développée dès l'antiquité. L'optique ondulatoire a été mise en évidence au XIX^e siècle avec l'expérience des fentes d'Young et l'optique quantique n'est apparue qu'au cours du XX^e siècle.

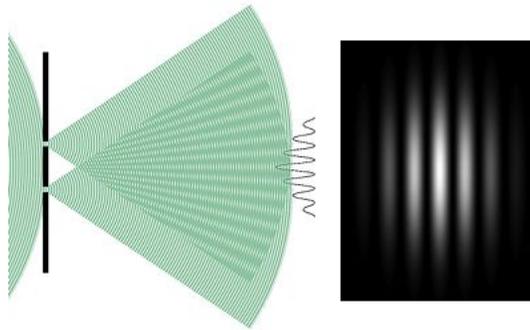


FIG. 2.2 – Expérience des fentes d'Young.

Maxwell a montré que la lumière peut être modélisée par un champ électromagnétique, qui se propage dans une direction perpendiculaire à lui-même. Lorsque ce champ a une fréquence bien déterminée, l'onde associée peut être caractérisée par sa longueur d'onde qui dépend, d'ailleurs, du milieu où elle se propage. Dans ce cas et dans le visible, la couleur perçue par le cerveau, via l'oeil, est la manifestation de la fréquence et non de la longueur d'onde : l'onde est qualifiée de monochromatique. La diffraction, les interférences ou la polarisation nécessitent de prendre en compte la nature ondulatoire de la lumière.

Mais beaucoup de phénomènes peuvent être interprétés en ne considérant que la direction de propagation de l'énergie de cette onde, le rayon lumineux. C'est l'optique géométrique, qui reste l'outil le plus flexible et le plus efficace pour traiter les systèmes dioptriques par exemple. Elle permet notamment d'expliquer la formation des images produites par ces systèmes.

L'optique géométrique ne permet pas d'expliquer tous les phénomènes lumineux. En particulier, elle ne tient pas compte du fait que la lumière est de nature ondulatoire. Lorsque tous les objets qui interagissent

avec la lumière ont des tailles caractéristiques grandes devant la longueur d'onde du rayon lumineux alors il est convenable et plus simple d'utiliser l'optique géométrique pour décrire son comportement avec une bonne précision. Mais quand la lumière diffuse sur ou passe à travers des objets dont la taille est du même ordre grandeur (voire plus petits) que sa longueur d'onde alors il n'est plus possible de négliger l'aspect ondulatoire et on entre dans le domaine de l'optique ondulatoire.

Deux phénomènes caractéristiques de l'optique ondulatoire, inexplicables dans le contexte de l'optique géométrique, sont les interférences lumineuses et la diffraction.

- Le premier est bien mis en évidence par l'expérience des fentes de Young dans laquelle on fait passer de la lumière à travers deux trous percés sur un cache. La lumière résultante observée sur un écran au delà du cache présente des variations spatiales d'intensité qui ressemblent d'autant plus au résultat attendu par l'optique géométrique que la distance qui sépare les deux trous est grande devant la longueur d'onde.
- Le deuxième est mis en évidence en faisant passer de la lumière à travers un simple trou circulaire. Si la taille du trou est grande devant la longueur d'onde alors l'image recueillie sur un écran est une tache correspondant à l'image du trou selon l'optique géométrique. Mais si le trou voit sa taille rétrécir alors on voit se développer une tache d'Airy avec des anneaux lumineux secondaires au delà de l'image ordinaire.

L'optique ondulatoire n'a pas été la seule à poser certains problèmes. En effet, l'illusion d'optique résulte d'une mauvaise analyse par le système visuel des informations qui lui parviennent. Cette erreur d'analyse peut donc entraîner la perception d'un objet qui n'est pas présent, à l'inverse nous rendre aveugle à un objet pourtant présent, nous donner une image faussée de la réalité, etc.

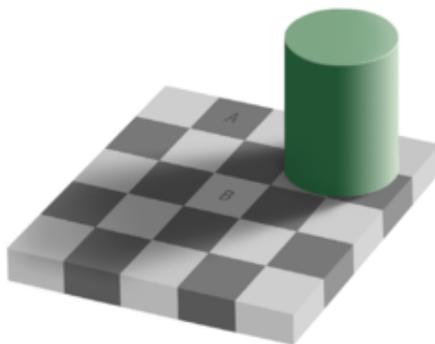


FIG. 2.3 – L'Échiquier d'Adelson

Ainsi, sur la figure 2.3, les cases A et B du dessin semblent être peintes de deux teintes de gris différentes alors qu'en réalité, si l'on mesure la luminance sur la photographie, les deux gris sont parfaitement identiques. Dans ce cas précis, cet exemple met en évidence la propension du système visuel à compenser les variations lentes de luminosité.

Chapitre 3

Propagation de la lumière

Dans le modèle ondulatoire une onde lumineuse est une variation périodique du champ électromagnétique qui se déplace dans tout l'espace. On peut repérer le déplacement de l'onde par celui d'une surface d'onde, sur laquelle le champ électromagnétique a une valeur constante. Dans le cas d'une onde progressive, ces surfaces se propagent dans la direction perpendiculaire à elles-mêmes : cette direction est celle des rayons, qui sont donc les normales à ces surfaces d'onde. Plus exactement, les rayons lumineux sont la direction de propagation de l'énergie, qui est également la direction de propagation de l'onde électromagnétique (dans un milieu homogène et isotrope).

3.1 Sources lumineuses

Un corps qui produit lui-même de la lumière est appelé « source de lumière ». Parmi ces dernières, il faut distinguer les sources naturelles de lumière, comme le soleil et les étoiles, et les sources artificielles constituées notamment par des solides incandescents (filaments d'ampoules électriques) ou par des gaz rendus luminescents par le passage du courant électrique (lampes au néon, au sodium, ...).

La plupart des corps lumineux renvoient une partie plus ou moins grande de la lumière qu'ils reçoivent. Ils ne sont lumineux que parce qu'ils sont éclairés. C'est le cas des personnes et objets qui nous entourent, mais aussi de la lune, qui diffuse la lumière solaire.

On emploie, pour désigner sans distinctions les sources lumineuses et les objets éclairés, la dénomination « objets lumineux ».

3.2 Corps transparents et translucides

Entre l'objet lumineux et l'oeil qui voit cet objet, la lumière traverse une certaine épaisseur d'air, l'objet demeure visible dans d'autres gaz mais aussi à travers une lame verre, du cellophane, ou encore une couche d'eau ou d'alcool. De tels corps constituent des *milieux transparents*.

Si l'on interpose entre l'objet et l'oeil une lame de verre dépoli, un papier de soie, un papier huilé, une fine couche de porcelaine, etc, on ne peut plus voir distinctement l'objet. De tels corps sont dits *translucides*.

La plupart des corps ne se laissent pas traverser par la lumière. Il s'agit des corps *opaques*.

En réalité, aucune substance n'est rigoureusement transparente ou opaque et la propagation de la lumière dans n'importe quel milieu s'accompagne toujours d'absorption, plus ou moins prononcée selon le milieu considéré. Ce phénomène d'absorption dépend donc de la nature mais aussi de l'épaisseur du milieu traversé par la lumière.

Par exemple, de l'eau très pure devient opaque sous une épaisseur d'une centaine de mètres.

3.3 Propagation de la lumière

Dans un espace sombre situé en dehors du trajet de la lumière, on peut voir ce trajet grâce à de fines particules solides (poussières, fumée, ...) ou liquides (brume, ...) qui reflètent la lumière devenant ainsi des objets lumineux qui, par diffusion, matérialisent le volume traversé par la lumière. C'est ce qu'on observe par exemple dans une salle de projection ou en voiture, dans le brouillard, lorsque les phares sont allumés.

Diverses observations ont suggéré l'hypothèse suivante :

Dans un milieu transparent, homogène, la lumière issue d'un point lumineux se propage suivant des droites issues de ce point.

Remarque : lorsque la source n'est pas ponctuelle, on dit qu'elle est *étendue*. On la considère alors comme constituée d'une infinité de points lumineux à partir desquels la lumière se propage en ligne droite.

3.4 Rayons et faisceaux lumineux

Les droites selon lesquelles se propage la lumière sont appelées *rayons lumineux*.

En optique, un rayon est une droite représentant le chemin optique de la lumière dans un milieu homogène. Cette droite est perpendiculaire en tout point au front d'onde, et son vecteur directeur en chaque point est le vecteur d'onde. On retrouve le mot dans ce sens dans l'expressions rayon de soleil.

Un *faisceau* est constitué par un ensemble de rayons lumineux produits par une source dans une direction donnée.

Dans l'exemple précédent, le faisceau se propage à partir de la source, c'est un faisceau *divergent*.

Lorsque la source ponctuelle est à l'infini (une étoile par exemple), les rayons émis à l'origine par cette source sont parallèles et forment un *faisceau cylindrique* ou *parallèle*.

On peut former un *faisceau convergent* à l'aide d'une lentille convergente (une loupe, par exemple).

Remarquons qu'il est impossible d'isoler un rayon lumineux. En effet, si l'on fait passer de la lumière à travers un diaphragme de très petit diamètre, la lumière se diffracte¹ et tout se passe comme si les bords du diaphragme devenaient de nouvelles sources ponctuelles.

3.5 Célérité de la lumière

La *célérité* est la vitesse de propagation d'une perturbation dans un milieu. Elle est propre à l'onde. elle s'exprime de la même façon que la vitesse (en m/s). La plus connue, celle de la lumière (souvent abusivement nommée *célérité* tout court), correspond à la propagation de la lumière dans le vide.

3.5.1 Vitesse de la lumière dans le vide

D'après les théories de la physique moderne, et notamment les équations de Maxwell, la lumière visible et toutes les ondes électromagnétiques ont une vitesse constante dans le vide, la vitesse de la lumière.

On la considère donc comme une constante physique notée c . Mais elle n'est pas seulement constante en tous les endroits de l'univers, mais elle l'est également d'un repère inertiel à un autre (principe de relativité restreinte). En d'autres termes, quel que soit le repère inertiel de référence d'un observateur ou la vitesse de l'objet émettant la lumière, tout observateur obtiendra la même mesure.

Aucun objet matériel ni aucun signal ne peut voyager plus vite que c dans le cadre des théories existantes. Seuls peuvent « voyager » plus vite que c (à vitesse dite supraluminique) des fronts virtuels (l'ombre portée à grande distance d'un objet en rotation, par exemple), et on ne peut, bien entendu, pas s'en servir pour transmettre un signal, ni de l'énergie. Ce ne sont en fait même pas des objets à proprement parler.

L'expérience relativement récente d'Alain Aspect montre qu'un observateur peut être informé instantanément, par une mesure sur une particule proche, de l'état d'une particule lointaine (sa jumelle), mais il n'y a pas là non plus de réelle transmission de signal.

La vitesse de la lumière dans le vide est notée c :

$$c = 299792458 \text{ mètres par seconde}$$

¹La diffraction est le résultat de l'interférence des ondes diffusées par chaque point.

Cette valeur est « exacte » par définition. En effet, depuis 1983, le mètre est défini à partir de la vitesse de la lumière dans le vide dans le système international d'unités, comme étant la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $\frac{1}{299792458}$ de seconde. Ce qui fait que le mètre est aujourd'hui défini par la seconde, via la vitesse fixée pour la lumière.

3.5.2 Interaction de la lumière avec la matière

Cependant, la vitesse de la lumière est toujours inférieure à c dans un milieu qui contient de la matière, cela d'autant plus que la matière est plus dense.

En effet, remarquons que la vitesse de la lumière, sans autre précision, s'entend généralement pour la vitesse de la lumière dans le vide. À noter que si aucun objet ne peut dépasser la vitesse de la lumière dans le vide dans quelque milieu que ce soit, dépasser la vitesse de la lumière dans le même milieu est possible. Par exemple, dans l'eau, les neutrinos peuvent aller plus vite que la lumière.

3.5.3 Historique : expériences de Fizeau et de Foucault

La première tentative pour mesurer la vitesse de la lumière fut faite en 1657 par Galilée. Elle échoua car les distances qu'il employait étaient parcourues en des temps trop courts pour qu'il puisse les apprécier avec les moyens dont il disposait.

Une valeur précise est obtenue expérimentalement dès le *XVII^e* siècle par l'astronome danois Ole Christensen Römer. En 1676, il propose une solution à un problème rencontré par Cassini, qui observe un retard de quinze minutes dans l'éclipse prédite d'Io, un satellite de Jupiter. Römer attribue ce retard à un allongement de la distance Terre-Io de l'ordre du diamètre de l'orbite terrestre, une distance suffisante pour influencer de façon notable le parcours de la lumière. La vitesse de la lumière fut alors estimée à environ 200 000 *km/s*, environ 35% en dessous de sa vraie valeur du fait des incertitudes de l'époque sur la taille de l'orbite de la Terre. Cependant, Cassini émit des doutes sur la validité des résultats de son collègue. James Bradley proposa ensuite, en 1728, une estimation à 298 500 *km/s*.

L'expérience de Fizeau est la première mesure non astronomique et donne un résultat du même ordre : 315 000 *km/s*.

Méthode de Fizeau : roue dentée

Le principe de l'expérience de Fizeau est le suivant : la roue dentée, qui possède 1440 secteurs angulaires identiques, est mise en rotation, la source lumineuse est réfléchi par un premier miroir incliné, franchit une échancrure de la roue, parcourt la distance d , se réfléchit sur un second miroir, parcourt à nouveau la distance d , retransverse la roue dentée, et parvient enfin à l'observateur après avoir parcouru une distance égale à deux fois la distance entre le miroir et la roue dentée à la vitesse c .

Cela peut être résumé par l'équation : $t = \frac{2d}{c}$

Où t est le temps d'aller et retour de la lumière pour parcourir la distance d à la vitesse c . Et où c est l'inconnue.

Fizeau réalise son expérience en 1849, entre Montmartre et le mont Valérien à Suresnes. Ces deux points étant distants d'exactly 8633 mètres.

La lumière de la lampe passe dans la première lunette et arrive sur un miroir séparateur incliné à 45° . Cette lame réfléchit la lumière qui passe alors à travers la roue dentée, par une des échancrures, puis part dans l'axe de la seconde lunette situées à 8633 mètres de là, sur la butte de Montmartre. Cette deuxième lunette est également munie d'un miroir lui permettant de renvoyer la lumière de là où elle vient, à Suresnes. La lumière est alors récupérée par la première lunette, passe à nouveau à travers la roue dentée, par un des échancrures, puis est observée par Fizeau par l'intermédiaire de l'oculaire de la lunette.

Lorsque l'on tourne très lentement la roue, tout en regardant dans l'oculaire, on observe l'éclat de la lumière qui apparaît et disparaît en alternance, les dents de la roue en rotation faisant obstacle au passage du faisceau lumineux. Lorsque l'on accélère la roue, l'alternance entre les périodes lumineuses et obscures s'accroît, et le clignotement disparaît pour ne laisser qu'une tâche lumineuse continue, la rémanence de la lumière sur la rétine ne permettant plus de distinguer les phases où la lumière ne passe plus.

Si on accélère encore la roue, et que l'on dépasse les 12 tours par seconde, il arrive un instant, à 12,6 tours par seconde exactement, où le temps que la lumière met pour parcourir la distance Suresnes-Montmartre-Suresnes (soit un peu plus de 17 km) correspond à la durée exacte de passage d'une dent dans le faisceau lumineux. Ainsi, la lumière qui traverse la roue à l'aller, est bloquée à son retour par la dent suivante. Le faisceau est donc occulté et ne parvient plus à l'observateur.

Fizeau peut déterminer, grâce à des compteurs, la vitesse de rotation de la roue qui permet à la lumière de traverser une première fois à la roue mais d'être occulté à son retour.

En reliant la vitesse de rotation du miroir aux distances parcourues par la lumière, Fizeau peut déterminer le temps que met la lumière à parcourir le trajet. Connaissant ce temps, il peut calculer la vitesse de la lumière, en divisant la distance par le temps.

Il accumula le résultat de 28 observations et obtint une moyenne de « 70 948 lieues de 25 au degré », soit 315 300 kilomètres par seconde. Ce qui ne représente que 5% d'erreur, la vitesse étant d'un peu moins de 300 000 km/s.

La difficulté principale de l'expérience étant de mesurer le plus précisément possible la vitesse de rotation de la roue dentée. Cette mesure était réalisée grâce à des compteurs installés sur les engrenages d'entraînement de la roue.

Soit l'équation $t = \frac{2d}{c}$ où t est le temps d'aller et retour de la lumière pour parcourir la distance d à

la vitesse inconnue c . Avec $d = 8633 \text{ m}$, on a : $t = \frac{2 \times 8633}{c}$.

La roue dentée possède $2 \times 720 = 1440$ secteurs angulaires identiques, de valeur $A = \frac{2\pi}{1440}$ radians. La vitesse angulaire ω du disque vaut $\omega = 2\pi \times 12,6 \text{ rad/s}$ (déterminée par l'expérience).

Lors du temps nécessaire pour un aller retour de la lumière, l'échancrure tourne de l'angle A à la vitesse ω pendant le temps t . On a donc $t = \frac{A}{\omega} = \frac{1}{1440 \times 12,6} \text{ s}$.

Si on égalise les deux équations donnant le temps t , on peut déduire c : $t = \frac{2 \times 8633}{c}$ et $t = \frac{1}{1440 \times 12,6}$. D'où $c = 2 \times 8633 \times 1440 \times 12,6 = 3,13 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (à comparer à la valeur exacte de $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

Méthode de Foucault : miroir tournant

En 1850, Fizeau et Foucault reprennent l'expérience dans l'eau. L'année suivante, Foucault mesure la célérité c' de la lumière dans de l'eau en translation à la vitesse u et trouve

$$c' = \frac{c}{n} + u \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

où n est l'Indice de réfraction de l'eau. La Relativité restreinte donnera en 1905 une explication complète de ce résultat.

Dans le cas statique, où l'on considère la vitesse de translation du milieu u comme nulle, on peut utiliser la démonstration ci-dessous.

Un faisceau lumineux issu d'une source est réfléchi par un miroir mobile qui tourne autour d'un axe. Le faisceau arrive ensuite sur un miroir concave dont le centre de courbure se trouve sur l'axe de rotation du miroir mobile. Ces deux miroirs se trouvent à une distance d l'un de l'autre.

Lorsque la lumière réfléchie sur le miroir concave retombe sur le miroir tournant, ce dernier a tourné d'un angle α et le rayon réfléchi forme, avec le rayon incident, un angle 2α .

La vitesse c de la lumière sera donnée par $c = \frac{2d}{t}$ où t est le temps nécessaire pour que le miroir tourne d'un angle α .

Si le miroir tourne à la vitesse angulaire de $\omega = 2\pi N \text{ rad/s}$ (c'est-à-dire N tours par seconde), on a $t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{2\pi N}$ et donc il vient finalement $c = 2d \frac{2\pi N}{\alpha} = \frac{4\pi N d}{\alpha}$.

Méthodes modernes

Les méthodes modernes, quant à elles, mesurent la longueur d'onde λ et la fréquence ν d'ondes hertziennes centimétriques (infra-rouge lointain) et calculent c par la relation $c = \lambda \nu$.

Chapitre 4

Réflexion de la lumière

4.1 Généralités

Si l'on envoie un faisceau lumineux cylindrique sur une surface métallique polie et plane, on constate que la lumière est renvoyée selon une direction privilégiée. Ce phénomène est celui de la *réflexion de la lumière* dans le cas particulier d'une surface réfléchissante plane (*réflexion spéculaire*).

Si la surface n'est pas polie, la lumière est renvoyée dans toutes les directions, c'est le phénomène de *diffusion de la lumière*. C'est le cas des objets éclairés qui renvoient une partie plus ou moins importante de la lumière, comme avec un écran de cinéma, la lune ou encore la neige.

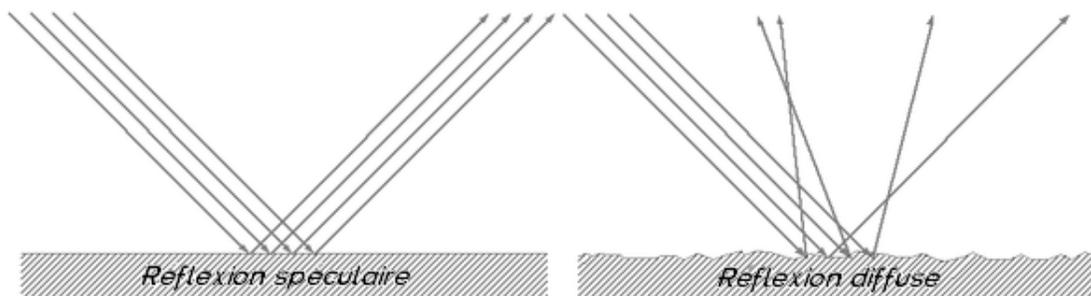


FIG. 4.1 – La réflexion de la lumière peut être spéculaire ou bien diffuse suivant la nature de l'interface.

Une surface qui réfléchit la quasi-totalité de la lumière qu'elle reçoit est un *miroir*. Remarquons que ce qui n'est pas réfléchi est absorbé, transmis et/ou diffusé.

Il existe différents types de miroirs :

1. les miroirs plans,
2. les miroirs sphériques, concaves ou convexes,
3. les miroirs paraboliques.

4.1.1 Lois de réflexion sur les miroirs

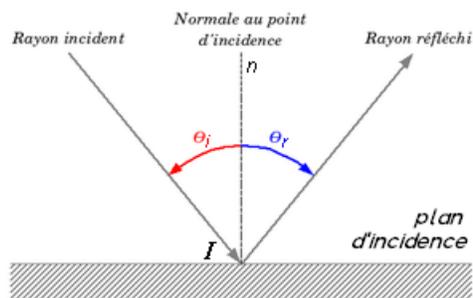
La loi de la réflexion optique est un des fondements de l'optique géométrique : elle indique que

le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale à la surface au point de réflexion

et que

l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence (angles mesurés par rapport à la normale) :

$$\theta_i = \theta_r$$



Miroirs plans

Un Miroir plan est, en optique, une surface plane parfaitement réfléchissante. Toutefois, un dioptre, même en présence de réfraction, entraîne un phénomène de réflexion partielle. C'est pourquoi, il est possible, à travers une vitre, de voir à la fois son propre reflet et ce qui se trouve derrière.

Les lois de la réflexion (dite spéculaire) sont les mêmes. La conséquence est qu'un miroir est un système stigmatique¹ rigoureux pour tout point et que l'image donnée par un miroir est une image virtuelle.

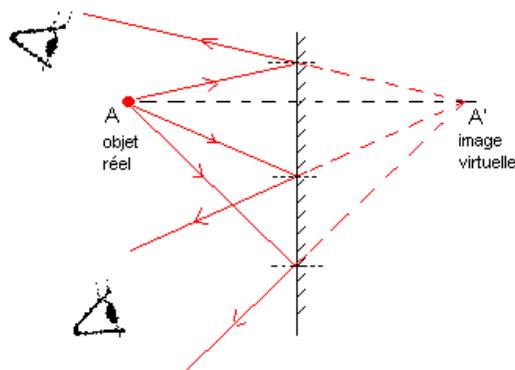


FIG. 4.2 – Image donnée par un miroir plan

¹Un système optique est dit stigmatique si tout faisceau issu d'un point lumineux donne à la sortie du système, un faisceau convergent en un point, ou semblant provenir d'un point. Ce point est appelé image.

Un observateur, et ce quelle que soit sa position, recevra de la lumière qui lui semble provenir d'un point symétrique de l'objet par rapport au miroir : l'image (virtuelle) que l'observateur voit.

Dans la figure 4.2, ont été représentés quelques rayons issus d'un objet lumineux réel (rayons incidents) et venant se réfléchir sur le miroir, que l'on schématise par un segment muni de hachure à l'arrière, selon les lois de Snell-Descartes (rayons réfléchis).

Miroirs courbes (sphériques)

Dans le cas d'un miroir courbe, on considère localement le plan tangent à l'endroit de l'impact du rayon sur le miroir, et on applique la loi de la réflexion à ce plan tangent.

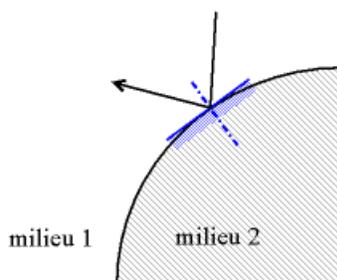


FIG. 4.3 – Réflexion sur un miroir courbe convexe, plan tangent au point d'impact.

Le miroir est dit *convexe* si les rayons se réfléchissent à l'extérieur de la calotte, et *concave* si la réflexion se produit à l'intérieur de la calotte.

Un miroir sphérique est constitué d'une calotte sphérique, c'est-à-dire une sphère tronquée par un plan. L'ouverture du miroir est donc un cercle et l'axe du miroir est la droite normale à l'ouverture et passant par son centre.

Le miroir sphérique n'est pas stigmatique. Il peut toutefois, si sa courbure est faible, être utilisé en stigmatisme approché.

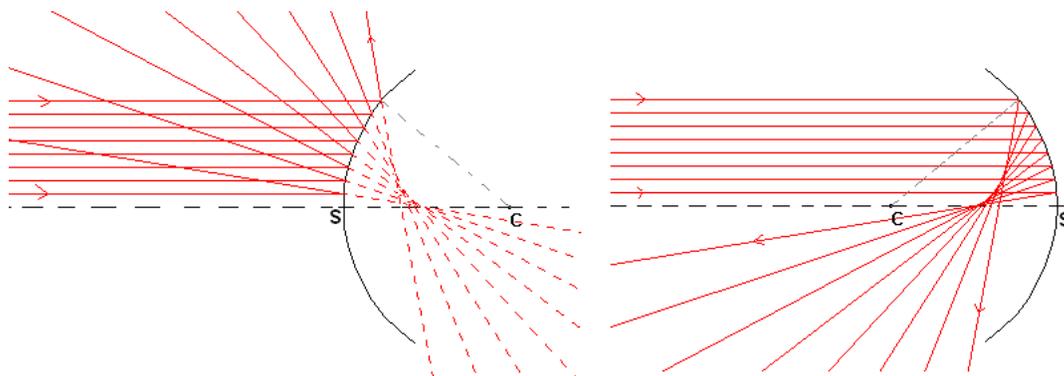


FIG. 4.4 – Miroir sphérique convexe (à gauche) et concave (à droite)

Dans le cas où l'on emploie l'hypothèse du stigmatisme approché, on considère que le foyer F est fixe et placé sur l'axe principal, en général à égale distance du centre de courbure C et du sommet S .

En optique, un foyer est un point vers lequel convergent les rayons lumineux issus d'un point après leur passage dans un système optique, ici constitué par le miroir.

Autres miroirs courbes particuliers

Certains miroirs courbes sont fréquemment utilisés en raison de leur propriétés particulières. Ce sont des miroirs dont la surface est obtenue en faisant tourner une conique (cercle, ellipse, parabole, hyperbole) autour de leur axe (la surface s'appelle respectivement une sphère, un ellipsoïde de révolution, un parabolôïde de révolution et un hyperbolôïde de révolution). La notion mathématique de foyer de la conique (point permettant, avec la droite directrice et l'excentricité, de caractériser la conique) ne recoupe en général pas celle de foyer en optique géométrique (point où convergent les rayons venant de l'infini après déviation), sauf dans le cas de la parabole. Les courbes génératrices étant soit fermées, soit d'extension infinie, les miroirs réels sont donc des surfaces tronquées.

Les *miroirs paraboliques concaves* sont beaucoup utilisés soit pour produire des faisceaux de lumière parallèles, notamment dans des projecteurs, soit pour recueillir la lumière provenant d'une source lointaine et la concentrer en son foyer. Le principe est le même en vertu du *principe du retour inverse de la lumière*.

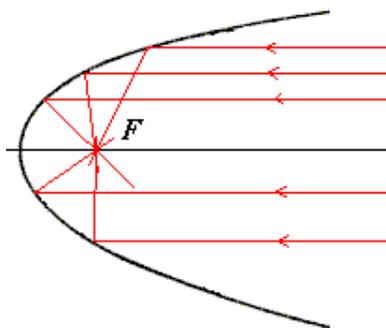


FIG. 4.5 – Miroir parabolique

Ceci provient d'une propriété géométrique de la parabole : si l'on met une lampe au foyer de la parabole, les rayons réfléchis ressortent parallèles à l'axe de la parabole (le foyer géométrique est ici confondu avec le foyer optique).

Un *miroir elliptique* épouse la forme d'un ellipsoïde de révolution. On utilise des miroirs elliptiques concaves pour former un faisceau lumineux convergent, par exemple dans les lanternes de projecteurs de cinéma.

En effet, selon une propriété géométrique des ellipses, un rayon partant d'un foyer est réfléchi vers l'autre foyer (il s'agit là des foyers au sens géométrique, et non pas d'un point permettant la création

d'un faisceau parallèle).

Cette propriété est actuellement utilisée dans la conception des phares de voitures, pour éclairer une zone de la route située devant le véhicule. Une technique similaire était autrefois employée lors de l'édification de certains édifices religieux, pour permettre, via la réflexion des ondes sonores sur le plafond elliptique de l'édifice, à des gens contagieux, placés sur l'un des foyers de communiquer avec des individus non atteints, placés sur le second foyer, sans risque de contagion.

4.1.2 Retour inverse de la lumière

Supposons dans le cas du miroir plan, que la lumière se propageant en sens inverse arriverait sur le miroir, selon l'ancien rayon réfléchi.

D'après les lois de la réflexion, la lumière se réfléchirait alors selon l'ancien rayon incident. Donc, le trajet de la lumière n'est pas modifié quand on inverse le sens de la propagation.

Cette propriété tout à fait générale, s'exprime par la *loi du retour inverse de la lumière* :

Si la lumière suit un trajet quelconque d'un point A à un point B (y compris dans un système optique), alors la lumière peut suivre exactement le trajet inverse de B vers A .
Autrement dit, le sens de parcours change, mais pas les directions.

4.2 Miroirs plans

Un miroir plan est donc une surface réfléchissante plane vis-à-vis de laquelle les rayons lumineux suivent les lois de la réflexion.

4.2.1 Objets et images, réels et virtuels

Pour un instrument d'optique, un point est *objet* lorsqu'il est à l'intersection de rayons qui arrivent sur l'instrument et qui forment donc un faisceau *incident*.

Le point objet est *réel* quand les rayons lumineux partent de l'objet. Le faisceau incident est alors *divergent*.

Le point objet est *virtuel* quand il est sur le prolongement des rayons, là où ils convergeraient s'ils n'étaient pas interceptés par l'instrument. Le faisceau incident est alors *convergent*.

Un point *image* est à l'intersection des rayons qui partent de l'instrument d'optique en formant un faisceau *émergent*.

Le point image est *réel* quand les rayons passent effectivement par ce point. Le faisceau émergent est alors *convergent*.

Le point image est *virtuel* quand il est sur le prolongement des rayons émergents. Le faisceau émergent est alors *divergent*.

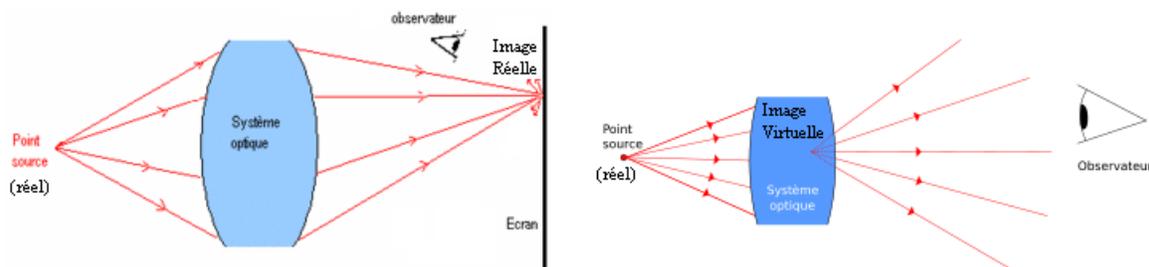


FIG. 4.6 – Image réelle recueillie sur un écran (à gauche) et image virtuelle visible par un oeil placé dans le faisceau (à droite)

Une image virtuelle est un terme utilisé en optique pour désigner une image qui ne peut pas être recueillie sur un écran.

C'est le cas d'un système optique convexe utilisée comme loupe qui permet d'obtenir une image agrandie de l'objet observé à travers la lentille. En effet, si l'on place un écran derrière la loupe, aucune image ne s'affichera, mais si l'on éloigne l'objet (ou la loupe), le même système convexe donnera une image réelle et renversée, projetable sur un écran (plaque ou pellicule de l'appareil photographique), l'expérience du soleil trouant une feuille de papier permet aussi de contrôler l'existence d'une image réelle donnée par un système convexe. Tout dépend donc des emplacements respectifs objet-lentille-œil.

Rappelons que la propriété qui, à un point objet associe un point image s'appelle le *stigmatisme*. Une telle propriété des systèmes optiques est rare. Seul le miroir plan est stigmatique pour tout point. D'autres systèmes ne sont rigoureusement stigmatiques que pour quelques points particuliers.

Dans de nombreux cas (en particulier pour les lentilles) on doit se contenter d'un stigmatisme approché.

On est amené à parler de stigmatisme approché lorsque les rayons convergent presque en un même point, c'est-à-dire lorsque la zone de convergence a une taille inférieure à la résolution de notre vue (typiquement, dans des conditions optimales de contraste et d'éclairement, l'œil humain peut séparer, à une distance de 10 m, deux points écartés de 3 mm : on parle de pouvoir séparateur ou de résolution de la vue).

4.2.2 Construction de l'image

Image virtuelle d'un objet réel

Considérons un faisceau divergent issu d'une source ponctuelle S . Le faisceau se réfléchit sur un miroir et pénètre l'œil d'un observateur. (voir figure 4.2)

L'œil voit le point lumineux S' , image de la source ponctuelle S dans le miroir, au point de rencontre des prolongements des rayons réfléchis.

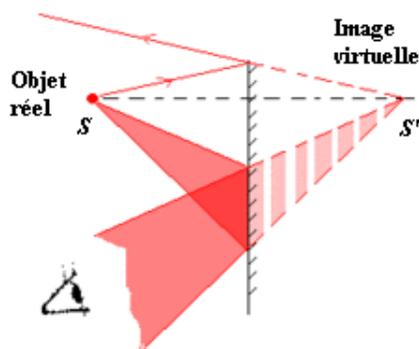


FIG. 4.7 – Faisceau réfléchi et image d'un point

De par les propriétés des triangles semblables, on peut démontrer que S' est le symétrique de S par rapport au miroir. S' est donc l'image virtuelle du point objet réel S . Elle n'existe pas réellement et ne pourra jamais être reçue sur un écran.

Si la source S n'est pas un point mais, par exemple, le filament d'une ampoule, ce dernier pourra être considéré comme un ensemble de points. À chaque point de l'objet, le miroir fait correspondre un point image virtuel. L'ensemble de ces points constitue l'image de l'objet.

En conclusion, un miroir plan donne d'un objet réel une image virtuelle symétrique de l'objet par rapport au miroir.

Image réelle d'un objet virtuel

Supposons que dans l'exemple précédent, on inverse le sens de propagation de la lumière. Le faisceau incident (l'ancien faisceau émergent) est maintenant convergent et convergerait en S' si le miroir ne l'interceptait pas et ne le faisait converger en S après réflexion.

D'après la loi du retour inverse de la lumière, les points S et S' occupent toujours les mêmes emplacements symétriques par rapport au miroir.

Le point S' est maintenant point objet et le point S point image.

Le point S' n'existe pas en réalité à cause du miroir et est donc, pour ce dernier, un objet virtuel.

Le point S se trouve effectivement au point de rencontre des rayons lumineux émergents qui convergent et est dès lors un point image réel.

Remarquons que, pratiquement, pour réaliser un objet virtuel, on réalise d'abord une image réelle à l'aide d'une lentille convergente par exemple. Puis on interpose un miroir entre la lentille et l'image réelle qui devient ainsi un objet virtuel pour le miroir qui l'empêche de se former.

L'image de chaque point de l'objet virtuel est un point réel. L'ensemble de ces points forment l'image réelle symétrique de l'objet virtuel par rapport au miroir.

En conclusion un miroir plan donne d'un objet virtuel une image réelle symétrique de l'objet par rapport au plan du miroir.

Remarquons que l'observation d'un point réel ou virtuel n'est possible que si l'œil se trouve sur le trajet du faisceau émergent. Cependant, on peut rendre visible de tous les points de l'espace une image réelle en la projetant sur une surface dépolie (écran diffusant, toile blanche). Chaque point de l'image devient alors un point lumineux qui envoie la lumière dans toutes les directions.

4.2.3 Champ d'un miroir

Suite à ce qu'il a été dit précédemment, on peut remarquer que, de manière générale, tout rayon réfléchi qui pénètre dans l'œil correspond à un rayon incident dont le support passe par l'image virtuelle de l'œil vis-à-vis du miroir.

Dès lors, on appelle champ d'un miroir pour une position donnée de l'œil, la portion de l'espace vue par réflexion dans le miroir.

Ce qui précède permet aussi de dire que le champ d'un miroir est la portion d'espace limitée par la surface engendrée par une droite passant par l'image de la pupille et s'appuyant sur le contour du miroir.

On voit que le champ du miroir varie avec la position de l'œil ou l'orientation du miroir (remarquons dès lors qu'il n'est pas exactement le même pour les deux yeux).

En particulier, le champ du miroir augmente quand l'œil s'en approche mais il dépend aussi de la forme et de la grandeur du miroir lui-même.

Le champ d'un miroir est donc la région de l'espace vue par un observateur à travers le miroir. Il est défini par le cône (si le miroir est circulaire) qui s'appuie sur le contour du miroir et dont le sommet est l'image de l'œil de l'observateur. Ce champ augmente lorsque la distance œil-miroir diminue ou que la

taille du miroir augmente.

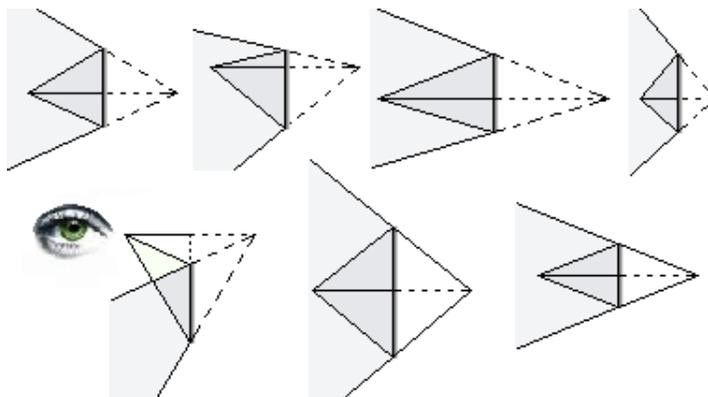


FIG. 4.8 – Champ d'un miroir : illustration des différents cas.

4.2.4 Rotation d'un miroir : Le théorème de POGGENDORF

Le théorème de POGGENDORF établit que la rotation d'angle α d'un miroir se traduit par une rotation d'angle $\beta = 2\alpha$ du rayon réfléchi.

Pour le démontrer, considérons un miroir sur lequel tombe un rayon incident. Il se réfléchit en respectant les lois de l'optique géométrique et on a $\hat{i} = \hat{r}$.

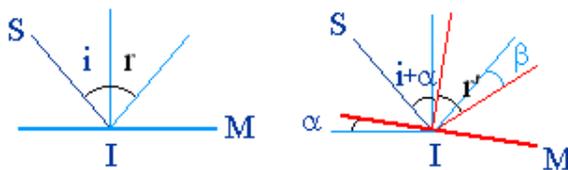


FIG. 4.9 – Rotation d'un miroir : illustration.

Si le miroir tourne d'un angle α , le nouveau rayon réfléchi sera tel que $\hat{i} + \alpha = \hat{r}'$. Calculons l'angle β entre les deux rayons réfléchis r et r' relatifs au même rayon incident mais correspondant aux deux positions respectives du miroir.

D'après les lois de la réflexion, l'angle des rayons incident et réfléchi vaut $\hat{r} = \hat{i}$. Le rayon incident, inchangé, forme l'angle $\hat{i}' = (\hat{i} + \alpha)$ avec la normale au miroir dans la deuxième position. Les rayons incident et réfléchi forment donc l'angle $\hat{r}' = \hat{i} + \alpha$.

Dès lors, avec la loi de la réflexion qui justifie que la somme de l'angle incident et réfléchi vaut $\hat{i} + \hat{r} = 2\hat{i}$, l'angle entre les deux normales valant α , on a que la somme du nouvel angle d'incidence \hat{i}' avec le nouvel angle réfléchi \hat{r}' vaut $2(\hat{i} + \alpha) = 2\hat{i} + \beta$, ce qui nous permet d'obtenir l'angle de déviation β en transformant la relation selon

$$\boxed{\beta = 2\alpha}$$

4.3 Miroirs sphériques

Un miroir sphérique est constitué d'une calotte sphérique, c'est-à-dire une sphère tronquée par un plan. L'ouverture du miroir est donc un cercle et l'axe du miroir est la droite normale à l'ouverture et passant par son centre.

On dit que le miroir est dans les conditions de Gauss si les rayons incidents sont paraxiaux (autrement dit, s'ils frappent le miroir très près du sommet en faisant un angle très petit avec l'axe du miroir). On est alors en stigmatisme approché.

Un système optique est dit stigmatique si tout faisceau issu d'un point lumineux (éventuellement situé à l'infini) donne à la sortie du système, un faisceau convergent en un point, ou semblant provenir d'un point.

Utilisé dans les conditions de Gauss, un miroir sphérique est approximativement stigmatique et aplanétique, c'est-à-dire que l'image d'un objet perpendiculaire à l'axe optique est perpendiculaire à l'axe optique.

Dans ces conditions, on peut remarquer qu'un rayon passant par le centre de courbure est réfléchi sur lui-même (car l'angle d'incidence est nul, d'où l'angle de réflexion l'est aussi).

On peut aussi noter qu'un rayon parallèle à l'axe principal se réfléchit en formant, avec la normale, un angle θ_r égal à l'angle d'incidence θ_i . Le rayon réfléchi rencontre l'axe principal en un point F appelé foyer, situé à peu près à mi-distance du sommet S et du centre de courbure C .

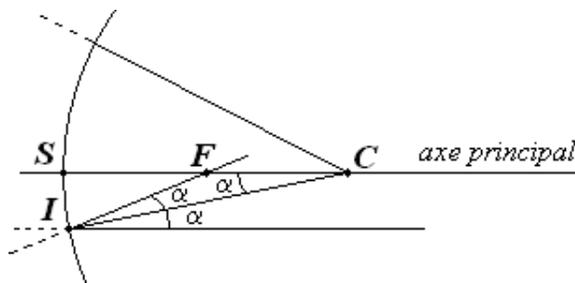


FIG. 4.10 – Miroir sphérique : illustration.

En effet, le triangle IFC est isocèle de par les propriétés de la réflexion et des angles alternes-internes. Dès lors, si l'on ne s'éloigne pas trop de l'axe principal (conditions de Gauss), on peut faire l'approximation que $|IF| = |SF|$ et le foyer F est situé à mi-distance du sommet S et du centre de courbure C . La distance $|SF|$ est appelée *distance focale*.

En conclusion, nous dirons que

Tout rayon lumineux passant pas le centre de courbure d'un miroir sphérique se réfléchit sur lui-même

et

Tout rayon lumineux parallèle à l'axe principal d'un miroir sphérique se réfléchit en passant par le foyer et, à l'inverse, tout rayon lumineux passant par le foyer se réfléchit parallèlement à l'axe principal

Remarquons que ces propriétés sont communes aux miroirs sphériques concaves et convexes. Dans le cas des miroirs concaves, les rayons envisagés passent *réellement* par le centre de courbure et le foyer, dans le cas des miroir convexes, les rayons passent *virtuellement* par le centre de courbure et le foyer.

4.3.1 Images données par un miroir sphérique concave

On construit l'image d'un objet en le considérant comme un ensemble de points. L'image d'un point est déterminée, en pratique, en y faisant passer un rayon parallèle à l'axe principal, se réfléchissant en passant par le foyer et un rayon passant par le centre de courbure.

Dès lors, pour déterminer l'image d'un segment $[AB]$, il suffira de déterminer les images respectives des points A et B et de les relier.

On peut noter que lorsque l'objet se déplace de l'infini au foyer F d'un miroir concave, l'image est réelle, renversée et se déplace du foyer F à l'infini.

De plus, lorsque l'image se déplace du foyer F au sommet S , l'image est virtuelle, droite et se déplace de l'infini au sommet S .

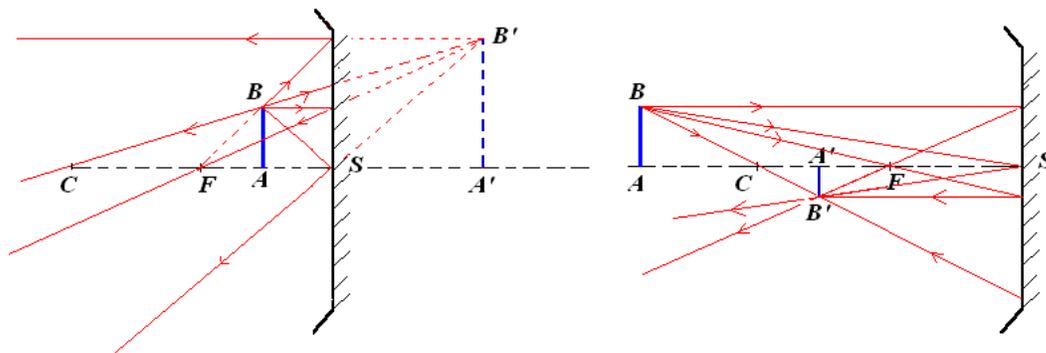


FIG. 4.11 – Image $A'B'$ donnée par un miroir sphérique concave.

4.3.2 Images données par un miroir sphérique convexe

Les lois régissant le miroir sphérique convexe sont similaires à celles du miroir sphérique concave, à savoir qu'un rayon passant, dans le cas convexe, *virtuellement* par le centre de courbure est réfléchi sur lui-même, qu'un rayon passant *virtuellement* par le foyer est réfléchi parallèlement à l'axe principal et

qu'un rayon parallèle à l'axe principal est réfléchi en passant *virtuellement* par le foyer.

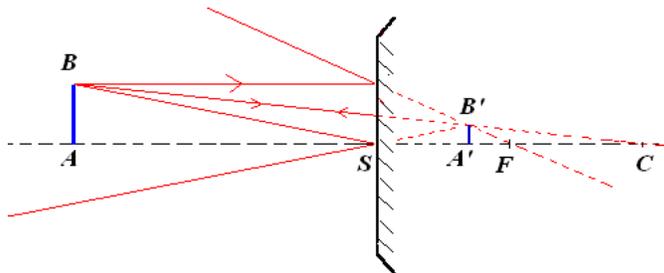


FIG. 4.12 – Image $A'B'$ donnée par un miroir sphérique convexe.

Remarquons que lorsque l'objet se déplace de l'infini au sommet du miroir convexe, l'image, toujours virtuelle et droite, se déplace du foyer au miroir.

L'image virtuelle formée par un miroir convexe est toujours plus petite que l'objet.

Le champ d'un miroir convexe (et même concave) est défini comme celui d'un miroir plan, à savoir qu'il s'agit de la région de l'espace visible pour un oeil qui se trouve dans une position déterminée. Il s'agit de l'intérieur de la surface engendrée par une droite passant par l'image virtuelle de l'oeil et s'appuyant sur les contours du miroir.

Il va de soi qu'à cause de leur grand champ, les miroirs convexes sont fréquemment utilisés comme rétroviseurs ou disposés à des carrefours où la visibilité est limitée.

4.3.3 Tableau récapitulatif des différents cas

Miroir plan

Objet	fait correspondre	Image
réel	\leftrightarrow	virtuelle
virtuel	\leftrightarrow	réelle

Miroir sphérique concave

Objet	Image	$\frac{ A'B' }{ AB }$	Image
à l' ∞	en F	$= 0$	} réelle et renversée
entre ∞ et C	entre F et C	< 1	
en C	en C	$= 1$	
entre C et F	entre C et ∞	> 1	
en F	à l' ∞	$\rightarrow \infty$	} virtuelle et droite
entre F et S	entre $-\infty$ et S	> 1	

Miroir sphérique convexe

Objet	Image	$\frac{ A'B' }{ AB }$	Image
entre l'_{∞} et S	entre F et S	< 1	virtuelle et droite

4.4 Applications : le miroir comme outil de réflexion

La première utilisation des miroirs fut sans doute pour se regarder soi-même, par souci de coquetterie.

Les premiers miroirs ont été fabriqués en polissant du métal. Pour éviter les problèmes d'oxydation du métal tout en gardant une bonne rigidité, on utilise maintenant en général une fine feuille de métal ou une coque d'amalgame d'argent ou d'étain accolée à une plaque de verre.

Dans ce dernier cas, il y a un phénomène de réflexion (dite partielle) et de réfraction dans la plaque de verre avant d'atteindre la feuille métallique, protégée au dos par un revêtement appelé *tain*, d'où naissance de deux images d'intensité très inégales, dont la plus faible est tout de même perceptible mais qui, dans l'usage courant, n'a pas d'importance, notre cerveau l'éliminant au titre d'image parasite.

En photographie et dans les expériences d'optique, les miroirs sont de vrais miroirs, donc sans glace interposée.

Archimède, entre 215 et 212 av. J.-C., se serait servi de miroirs concaves pour concentrer les rayons du Soleil et enflammer les voiles des navires romains qui attaquaient Syracuse (« miroir ardent »). Cette propriété de focalisation est utilisée de nos jours dans les télescopes ainsi que pour certains fours solaires.

Le champ de vision humain est limité. En réfléchissant les rayons venant d'une autre direction, un miroir permet d'étendre ce champ de vision dans d'autres directions (mais il masque une partie du champ de vision direct). C'est le principe des rétroviseurs d'automobile.

Un miroir bien placé permet de voir derrière un objet. Par exemple, le coiffeur met un miroir derrière la tête du client pour que celui-ci puisse voir, dans le miroir lui faisant face, la coupe vue de derrière. Les dentistes utilisent un petit miroir au bout d'une tige pour voir l'arrière des dents. Les services de sécurité, police ou douane peuvent inspecter le dessous d'un véhicule, d'un meuble bas ou le dessus d'une armoire avec un système similaire.

Dans sa forme la plus simple, le périscope est un boîtier rectiligne qui comporte à chaque extrémité ouverte un miroir à 45° . Les rayons lumineux entrant par l'extrémité objectif ressortent vers l'œil de l'observateur parallèlement mais décalés de la longueur du boîtier permettant ainsi de voir au-dessus d'une foule ou, par exemple, à un tireur embusqué de tirer sur sa cible sans être vu lui-même.

Des compléments optiques (lentilles, prismes, véhicule) le complexifient pour en augmenter les performances et la manipulation, ce qui permet à un sous-marin d'observer au dessus du niveau de la mer dans laquelle il est immergé. Depuis l'avènement du matériel vidéo, le jeu de miroir est souvent remplacé par des caméras haute-définition reliées à un écran, permettant un traitement ou un enregistrement des

images.

Les miroirs évoqués ci-dessus ont pour but de donner une représentation fidèle (ou légèrement déformée mais agrandie) des objets. Mais un miroir peut aussi donner une vision volontairement déformée, par exemple dans les miroirs déformants des attractions de foire, sans parler des applications des miroirs paraboliques et elliptiques, évoquées plus tôt.

Les *anamorphoses* à miroir permettent grâce à l'interposition d'un miroir cylindrique ou conique de faire apparaître une image qui est la réflexion d'une image déformée conçue à cet effet. L'image déformée est peinte sur une surface plane autour d'un emplacement prévu du miroir, ce n'est qu'en y installant le miroir que l'image apparaît non déformée sur la surface du miroir. Répandu au *XVII^e* et au *XVIII^e* siècle, ce procédé a permis de diffuser caricatures, scènes érotiques, scènes de sorcellerie, qui se révélaient pour un public mis dans la confiance lorsque le miroir était correctement positionné sur la peinture.

Les miroirs réfléchissent les rayons de manière symétrique, loi décrite par Descartes au *XVII^e* siècle et inversent l'image (droite/gauche). Ainsi, si l'on voit un objet, à partir de l'orientation du miroir (angle que fait sa surface avec l'axe de vision), on peut déterminer la direction dans laquelle se trouve l'objet observé. Ce principe est utilisé dans les sextants pour déterminer la hauteur d'un astre (angle par rapport à l'horizon), et par les géomètres pour déterminer les distances.

Un miroir peut réfléchir un rayon lumineux vers l'endroit d'où il vient, après avoir parcouru une certaine distance, mais le problème technique à résoudre sera celui de l'alignement. Le temps de trajet de la lumière a ainsi servi à la mesure de la vitesse de la lumière. Cette vitesse étant connue, on peut se servir de cette technique pour déterminer les distances. Par exemple, on a mesuré la distance Terre-Lune-Terre à l'aide d'un faisceau laser émis depuis la Terre, réfléchi par un bloc trièdre de miroirs placé sur la Lune par une mission Apollo et revenant ensuite vers sa source.

On notera qu'on se sert actuellement du test du miroir, développé par l'Américain Gordon G. Gallup dans les années 1970, en zoologie et en philosophie de l'esprit pour apprécier le degré de conscience de soi dont font preuve les différentes espèces animales.

Ce test permet d'évaluer la conscience de soi en permettant de déterminer si un animal est capable de reconnaître son propre reflet dans un miroir comme étant une image de lui-même. Il consiste à placer subrepticement sur la tête de l'animal une marque colorée ne produisant pas d'odeur puis à observer si l'animal réagit d'une façon indiquant qu'il est conscient que la tache est placée sur son propre corps. Un tel comportement peut prendre la forme d'un déplacement ou d'une flexion pour mieux observer la marque ou encore, de façon bien plus évidente, celle d'un tâtonnement de soi avec une main pour essayer de l'atteindre tout en se servant du miroir.

Les animaux qui ont réussi le test du miroir sont les chimpanzés, les bonobos, les orang-outans, les dauphins, les éléphants et les humains. De façon assez surprenante, les gorilles échouent, même si l'un d'entre eux, du nom de Koko, l'a réussi. Ce serait parce que les gorilles considèrent le contact visuel les yeux dans les yeux comme un comportement agressif et qu'ils évitent habituellement de se regarder les uns les autres en face à face. Les enfants sont susceptibles de réussir le test à partir de deux, trois ou

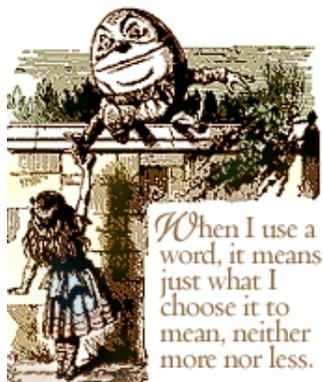
quatre ans d'âge (voir la définition du « stade du miroir » de Jacques Lacan). Les chiens et les bébés humains réagissent au miroir en manifestant de la peur ou de la curiosité mais peuvent également l'ignorer complètement, lui comme la tache. Les oiseaux vont jusqu'à attaquer leurs propres reflets, à l'exception notable des pies qui, vérifiant la similitude de leurs propres mouvements avec ceux de l'image projetée, finissent par se rendre compte qu'il ne s'agit pas d'un autre congénère, mais bien d'elles-mêmes.

Il existe des débats au sein de la communauté scientifique à propos de l'interprétation et de la valeur des résultats produits par le test. S'il a été largement utilisé et à bon escient pour mieux comprendre les primates, on considère parfois qu'il est réducteur lorsqu'on lui soumet des animaux qui se servent avant tout d'autres sens que la vue, comme les chiens de l'odorat par exemple.

Mis à part ces utilisations d'ordre technique, le miroir plan renvoie une image fidèle (mais inversée) de la personne qui se regarde dedans. Il est donc chargé d'une forte connotation symbolique. Il permet de se voir tel que l'on est, mais toujours sous un seul et même angle (face à face et inversé), notamment avec ses défauts. Il est souvent associé à la vérité, comme par exemple le Miroir Magique de Blanche-Neige des frères Grimm. C'est aussi le symbole d'une porte, d'une limite vers un autre monde, particulièrement mis en valeur dans *Alice au pays des merveilles*, écrit par le pasteur mathématicien Charles Lutwidge Dodgson, sous le pseudonyme Lewis Carroll.

Le Pays des merveilles est terriblement dépaysant. Dès son arrivée, la petite fille se retrouve en proie à une véritable crise d'identité, en raison des métamorphoses physiques qu'elle ressent en mangeant des champignons et certains gâteaux, mais aussi de la perte du savoir scolaire auquel elle voudrait tant se référer pour tenter de comprendre et de rationaliser le monde étrange qui l'entoure.

Ce pays est le lieu de la contestation d'un certain ordre établi, notamment de l'arbitraire du langage : Humpty Dumpty définit comme il l'entend le mot « gloire » et met à jour la nature purement conventionnelle du lien entre signe et sens. Le texte est aussi une critique de la société victorienne, notamment de ses intérieurs « fonctionnels », où chaque chose doit trouver et tenir une place minimale : le Lièvre de Mars et le Chapelier rangent le Loir dans la théière. Les frères Tweedle et Tweedledeum contredisent sans arrêt Alice. Le chat de Cheshire se contredit lui-même.



Chapitre 5

Réfraction de la lumière

5.1 Généralités

La lumière est déviée lorsqu'elle passe d'un milieu transparent à un autre (par exemple : de l'air à l'eau, ou le contraire). C'est ce phénomène qu'on observe lorsque l'on regarde une paille dans un verre : celle-ci paraît brisée. Cette fracture apparente est à l'origine du mot réfraction.

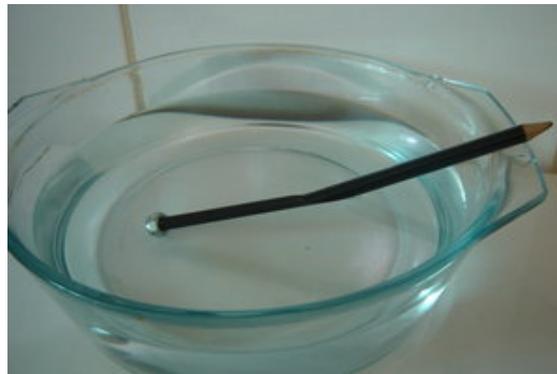


FIG. 5.1 – Le crayon nous paraît brisé à cause de la réfraction de la lumière.

Lorsqu'un faisceau parallèle arrive à la surface de l'eau contenue dans un récipient, celui-ci change de direction.

Une partie du faisceau est renvoyée dans l'air et constitue le faisceau réfléchi, tandis que l'autre partie pénètre dans l'eau et forme le faisceau *réfracté*.

La lumière est dite *réfractée* et la propriété qui caractérise les différents milieux transparents est la *réfringence*, qui se traduit par une valeur numérique : l'*indice de réfraction*.

On appelle dioptré l'ensemble de deux milieux transparents. En pratique, le mot dioptré désigne souvent la surface de séparation de ces deux milieux.

5.1.1 Lois de la réfraction

Les lois de la réfraction donnent la marche de rayons lumineux se propageant d'un milieu isotrope transparent dans un autre milieu isotrope transparent. On a que

Le rayon réfracté se situe dans le plan d'incidence

Le plan d'incidence est le plan défini par le rayon incident et la normale au dioptre, rayon incident et rayon réfracté étant de part et d'autre de la normale.

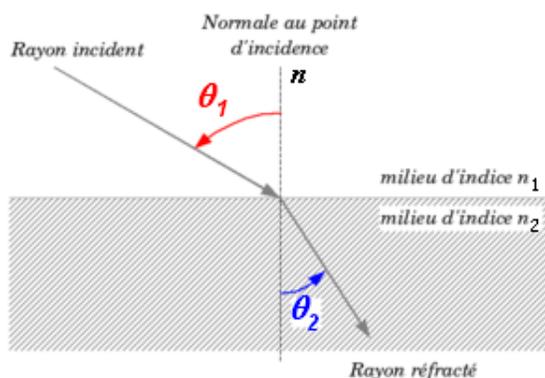


FIG. 5.2 – Lois de la réfraction : illustration

De plus, les angles d'incidence et de réfraction θ_1 et θ_2 , mesurés par rapport à la normale sont tels que

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_{2,1}$$

Autrement dit,

Pour deux milieux données et une lumière monochromatique déterminée, il existe un rapport constant entre le sinus de l'angle d'incidence et le sinus de l'angle de réfraction.

Cette constante $n_{2,1}$ qui, pour une lumière monochromatique donnée, ne dépend que des deux milieux, est l'*indice de réfraction* du milieu 2 par rapport au milieu 1.

5.1.2 Indice de réfraction absolu et relatif

L'*indice de réfraction absolu* n_i d'une substance, pour une lumière monochromatique donnée, est son indice de réfraction par rapport au vide¹ : $n_i = n_{i, \text{vide}}$.

¹Par exemple, l'indice absolu de l'air pour la raie jaune du sodium est 1,000292 (pratiquement, on prend 1).

Soient deux milieux d'indices absolus n_1 et n_2 , le milieu 2 est dit plus *réfringent* que le milieu 1 si $n_2 > n_1$

On peut dès lors exprimer la loi de la réfraction de la manière suivante :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

On peut alors remarquer que plus l'indice de réfraction n_2 est grand par rapport à n_1 , plus le rayon réfracté s'approche de la normale, et vice versa. De plus, lorsque l'indice de réfraction n_2 est plus petit que n_1 (par exemple : du verre à l'air), on peut dépasser une incidence dite « critique » au delà de laquelle il y a réflexion totale et aucune transmission.

L'*indice de réfraction relatif* d'un milieu 2 par rapport à un milieu 1 est égal au rapport des vitesses v_1 et v_2 de la lumière dans les milieux 1 et 2, c'est-à-dire

$$n_{2,1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Remarquons qu'avec cette définition, l'indice de réfraction absolu n_i d'un milieu i est égal au rapport de la vitesse v_i de la lumière dans le milieu i par la vitesse dans le vide c , c'est-à-dire

$$n_i = \frac{v_i}{c}$$

Considérons à présent trois milieux 1, 2, 3 dans lesquels la lumière se propage avec des vitesses v_1 , v_2 , v_3 . On peut définir les trois indices relatifs suivants :

$$n_{2,1} = \frac{v_1}{v_2} ; \quad n_{3,1} = \frac{v_1}{v_3} ; \quad n_{3,2} = \frac{v_2}{v_3}$$

Dès lors, il est facile de prouver que

$$n_{3,2} = \frac{n_{3,1}}{n_{2,1}}$$

En conséquence de quoi nous pouvons dire que l'indice relatif de deux milieux est égal au rapport de leurs indices absolus par rapport à une même substance.

En particulier, cette substance peut être le vide et l'indice de réfraction de deux milieux est égal au rapport de leurs indices absolus.

Soient deux milieux d'indices absolus n_1 et n_2 , l'indice de réfraction $n_{2,1}$ du milieu 2 par rapport au milieu 1 est donné par

$$n_{2,1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Les lois de la réfraction peuvent alors s'écrire

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

5.1.3 Réfraction limite et réflexion totale

Si $n_2 > n_1$ (par exemple passage de l'eau vers l'air), alors d'après la loi de Snell-Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, on a

$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2$$

Pour des valeurs de $\sin \theta_2$ proches de 1, c'est-à-dire pour des incidences rasantes (rayon incident proche de la surface, $\theta_2 \approx \frac{\pi}{2}$), la loi de Snell-Descartes donne une valeur de $\sin \theta_1$ supérieure à 1. On sort en effet de son domaine de validité : cela correspond à des situations où il n'y a pas de réfraction mais uniquement de la réflexion, on parle de « réflexion totale ».

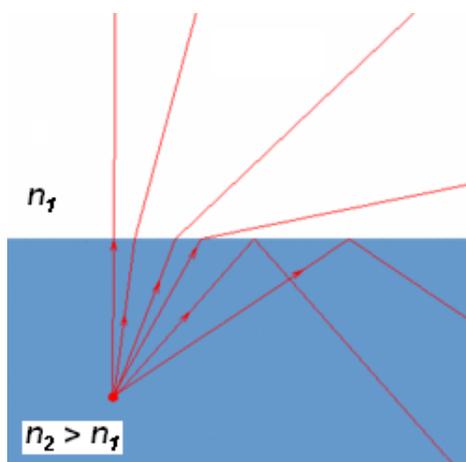


FIG. 5.3 – Au-delà d'une certaine inclinaison, les rayons ne franchissent plus le dioptre : ils sont réfléchis.

On a donc

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2 &\Leftrightarrow \sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \\ &\Rightarrow \sin \theta_{lim} = \frac{n_1}{n_2} \sin \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \theta_{lim} = \frac{n_1}{n_2} \end{aligned}$$

L'angle limite de réfraction est donc :

$$\theta_{lim} = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \right)$$

Cet angle est l'angle limite au delà duquel se produit la *réflexion totale*.

Précisons qu'en optique géométrique, un rayon lumineux traversant une séparation entre deux milieux d'indices optiques différents peut subir une réflexion et une réfraction. Lorsqu'il n'y a pas de rayon réfracté, on dit qu'il subit une *réflexion totale*.

Les deux conditions de réflexion totale sont donc

1. que le rayon incident tende à passer dans un milieu moins réfringent et
2. que l'angle d'incidence soit supérieur à l'angle limite θ_{lim} .

Considérons maintenant que la lumière passe d'un milieu 1 d'indice n_1 à un milieu 2 plus réfringent d'indice n_2 (par exemple, de l'air dans l'eau). Tous les rayons arrivant en un même point sur la surface du dioptre sont réfractés dans un milieu plus réfringent à l'intérieur d'un cône d'ouverture $2\theta_{lim}$.

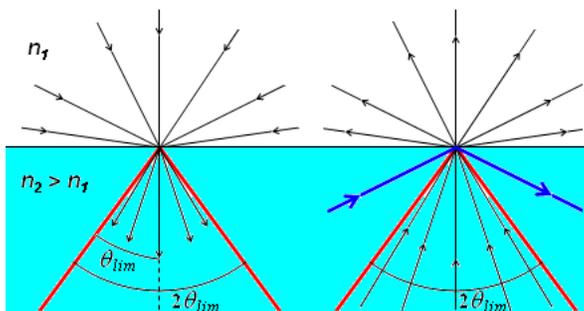


FIG. 5.4 – Le milieu 2 est plus réfringent que le milieu 1.

Dès lors, en considérant le retour inverse de la lumière, pour qu'un rayon puisse passer d'un milieu dans un autre plus réfringent, c'est-à-dire pour un rayon passant du milieu 2 au milieu 1, il est nécessaire et suffisant que l'angle d'incidence soit inférieur à l'angle limite θ_{lim} .

Cette propriété est mise à profit dans certains systèmes réflecteurs (prisme à réflexion totale) et les fibres optiques.

On choisit un prisme en verre d'indice $n_{verre} = 1,5$ et dont la section droite est un triangle isocèle. Etant donné que l'angle limite de l'air dans le verre équivaut à environ 42° , il y a réflexion totale car l'angle d'incidence vaut 45° (voir schéma).

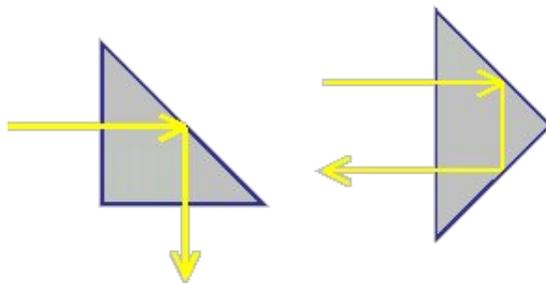


FIG. 5.5 – Prismes à réflexion totale.

5.2 Dioptre plan, lame à faces parallèles

Un *dioptre plan* est constitué par deux milieux transparents, isotropes, homogènes, d'indices différents, séparés par une surface plane. Par extension, la surface plane de séparation des deux milieux est aussi appelée dioptre.

Une *lame à faces parallèles* est un milieu transparent homogène limité par deux surfaces planes parallèles.

5.2.1 Image donnée par un dioptre plan

L'explication de l'expérience du crayon brisé repose sur deux points importants : les lois de Snell-Descartes, et la propriété de stigmatisme approché du dioptre plan permise par l'oeil, qui n'intercepte qu'un fin pinceau de lumière réfractée.

On constate alors que, les rayons étant réfractés en s'écartant de la normale, puisque l'indice de l'air est inférieur à l'indice de l'eau, la lumière qui arrive dans l'oeil de l'observateur semble provenir d'un point plus élevé.

La figure 5.6 illustre pour un point de l'extrémité du crayon. Il faudrait faire ainsi pour chacun des points pour avoir l'image (au sens du stigmatisme approché) du crayon. (Remarquons que l'effet d'un dioptre est aussi de donner une image déformée.)

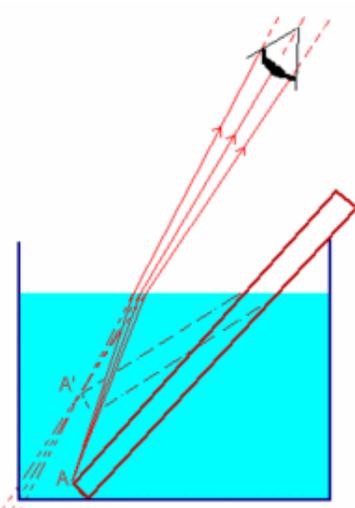


FIG. 5.6 – Parce que les rayons sont rabattus vers l'horizontale, l'observateur voit une image plus haute que le crayon.

On peut énoncer certaines remarques :

- l'image de l'extrémité du crayon n'est pas à la verticale de celle du crayon lui-même (contrairement à certaines schématisations rapides) et
- l'image de l'extrémité du crayon dépend de la position de l'observateur (conséquence immédiate du non stigmatisme du dioptre).

L'image du point A , si elle existe, se trouve au point A' de rencontre de la normale et du prolongement du rayon émergent (arrivant dans l'oeil).

Cependant, en toute rigueur, si l'on choisit un autre rayon émergent, on peut constater que l'image ne se formera plus en A' . L'image d'un point quelconque de l'espace n'est donc plus un point. On dit alors que le dioptre plan n'est pas stigmatique.

Il y a stigmatisme approché, c'est-à-dire que les images sont très rapprochées, si le point objet n'émet que des rayons lumineux peu écartés de la normale (θ petit).

5.2.2 Principe de Fermat

Un aspect particulièrement étonnant est la possibilité d'interpréter également ces lois de Snell-Descartes en terme de moindre parcours, et plus précisément en terme de moindre temps.

C'est Fermat qui a introduit cette interprétation, source tout à la fois pour lui de questionnements fondamentaux sur la « raison » de ce moindre parcours, et d'une approche théorique très puissante dite de moindre action.

L'énoncé du principe de Fermat est le suivant : « La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit minimum. »

Là encore, une analogie « mécanique » peut aider à comprendre pourquoi durée de parcours et trajectoire brisée sont intimement liées.

Considérons un athlète devant partir d'un point de la plage et rejoindre le plus vite possible une bouée située dans l'eau. Là encore, l'athlète court plus vite sur la plage qu'il ne progresse dans l'eau. En conséquence, il convient donc de ne pas aller en ligne droite vers la bouée, mais de rallonger la distance parcourue sur le sable (et diminuer celle à parcourir dans l'eau). Mais évidemment, il ne faut pas non plus trop rallonger sur le sable.

On peut alors chercher quel est le chemin qui correspond au minimum de temps. C'est un chemin tel que le point d'arrivée au bord de l'eau n'est ni l'intersection avec la ligne droite, ni le cas où la distance dans l'eau est la plus faible (en nageant perpendiculairement à la rive) mais un point entre les deux, et qui est tel que :

$$\frac{1}{v_1} \sin \theta_1 = \frac{1}{v_2} \sin \theta_2$$

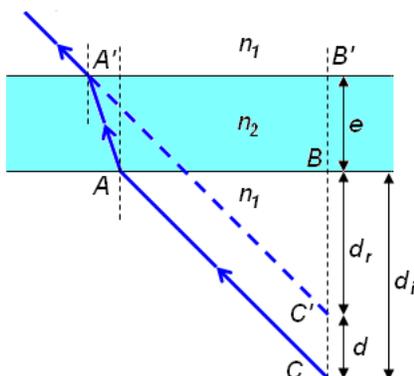
Et on retrouve l'expression de la loi de la réfraction.

5.2.3 Image donnée par une lame à faces parallèles

Soit une lame parallèle d'indice n_2 séparant deux milieux d'indices n_1 et n_3 .

En supposant le stigmatisme approché et $n_3 = n_1$, on peut démontrer que

$$d = e \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right)$$



En effet, soit θ_1 l'angle du rayon incident passant du milieu 1 dans le milieu 2 et θ_2 l'angle du rayon réfracté dans le milieu 2.

De par les relations entre les angles, on peut remarquer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables. Dès lors, on a que

$$\begin{aligned}
 \tan \theta_1 &= \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|A'C'|} \\
 \Leftrightarrow &\frac{|BC|}{d_i} = \frac{|B'C'|}{d_r + e} \\
 \Leftrightarrow &\frac{|BC|}{d_i} = \frac{|BC| + e \tan \theta_2}{d_r + e} \\
 \Leftrightarrow &\frac{d_i \tan \theta_1}{d_i} = \frac{d_i \tan \theta_1 + e \tan \theta_2}{d_r + e} \\
 \Leftrightarrow &(d_r + e) \tan \theta_1 = d_i \tan \theta_1 + e \tan \theta_2 \\
 \Leftrightarrow &(d_i - d_r) = e \left(1 - \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1}\right)
 \end{aligned}$$

Etant donné qu'on a fait l'hypothèse du stigmatisme approché, on considère que l'on ne s'éloigne pas trop de la normale. Or, pour de petits angles, le sinus est approximativement égal à la tangente. Dès lors, on a, avec $d = d_i - d_r$,

$$d \approx e \left(1 - \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}\right) = e \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

Remarquons que dans le cas où $n_1 \neq n_3$, on a

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3$$

Ce qui signifie aussi que $n_1 \sin \theta_1 = n_3 \sin \theta_3$ indépendamment du milieu d'indice n_2 (à l'exception de la condition de réflexion totale du milieu 1 vers le milieu 2).

5.3 Prisme

Un prisme est un polyèdre constitué par deux bases polygonales superposables situées dans deux plans parallèles et par des parallélogrammes joignant les bases.

En optique géométrique, on considère un *prisme* comme un milieu transparent limité par deux surfaces planes non parallèles. Du point de vue de l'optique géométrique, un prisme est donc l'association de deux dioptries plans non parallèles.

L'intersection de ces deux plans est l'*arête* du prisme et les deux plans constituent les deux *faces* du prisme.

Remarquons que dans la réalité, le prisme est limité par une troisième surface, la *base*, qui coupe les deux faces.

Toute section du prisme par un plan perpendiculaire à l'arête est une *section principale* dont l'angle α au sommet est l'*angle du prisme*.

L'angle δ est l'*angle de déviation* (il s'agit de l'angle formé par le prolongement du premier rayon incident et du deuxième rayon réfracté).

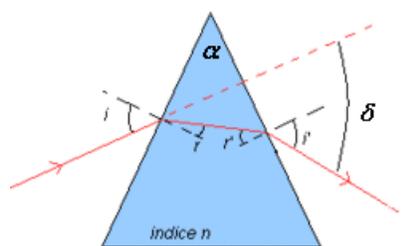


FIG. 5.7 – Prisme : définition des angles.

Le prisme sera utilisé dans le cas simple d'une lumière monochromatique et avec un rayon incident placé dans le plan de la section principale (de même pour le rayon émergent).

En effet, Lorsque la lumière passe de l'air au verre, par exemple, elle est réfractée. Lorsqu'elle ressort par l'autre face, elle est de nouveau réfractée. Le rayon ou faisceau incident est donc dévié. Mais l'indice de réfraction n'est pas le même pour les différentes longueurs d'onde. De sorte que, un pinceau de lumière blanche est séparé en ses composantes : le bleu est plus dévié que le jaune, lui-même plus dévié que le rouge. Dans ces conditions, le prisme peut être utilisé pour analyser un rayonnement visible polychromatique (spectroscopie).

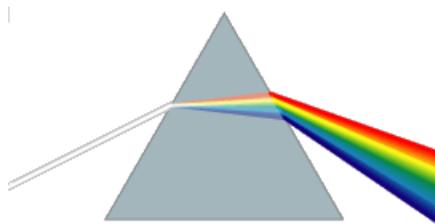


FIG. 5.8 – Décomposition de la lumière blanche à travers un prisme.

5.3.1 Formules fondamentales du prisme

Les formules fondamentales du prisme sont au nombre de quatre. Deux concernent les lois de Descartes relatives aux deux réfractions, les deux autres donnent les relations entre l'angle du prisme α , l'angle de déviation δ subi par le rayon lumineux lors de son passage dans le prisme et les angles d'incidence et de réfraction i, i', r et r' .

On a, avec $n = \frac{n_{prisme}}{n_{exterieur}}$,

$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r \\ \sin i' &= n \sin r' \\ \alpha &= r + r' \\ \delta &= i + i' - \alpha \end{aligned}$$

Remarquons que les formules précédentes ne sont valables que si l'angle d'incidence r' est inférieur à l'angle limite de réfraction.

De plus, dans le cas où le rayon change de côté par rapport à la normale, il faut compter négativement l'angle correspondant.

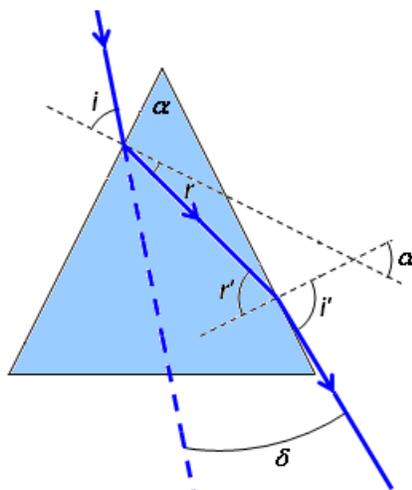


FIG. 5.9 – Prisme : définition des angles.

On a

$$\alpha = r' - r \quad \text{et} \quad \delta = i' - i - \alpha$$

5.3.2 Conditions d'émergence

Pour que le deuxième rayon émergent existe, il faut que l'angle d'incidence r' ne dépasse pas l'angle limite de réfraction θ_{lim} (en supposant que le prisme est plus réfringent que le milieu extérieur).

Suivant l'angle du prisme, suivant son indice, un rayon arrivant sous une incidence trop faible peut ne pas émerger par la face opposée. Il est réfléchi par le dioptré et émerge donc par la base du prisme.

L'angle r' n'étant pas directement accessible à l'expérience, la condition $r' \leq \theta_{lim}$ sera transformée en une condition sur l'angle d'incidence i . On a

$$\begin{aligned} \alpha &= r + r' \\ \Leftrightarrow r' &= \alpha - r \\ \Rightarrow \theta_{lim} &\geq \alpha - r \\ \Leftrightarrow r &\geq \alpha - \theta_{lim} \end{aligned}$$

L'angle r varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ donc, $\sin r$ varie comme r , d'où

$$\begin{aligned} \sin r &\geq \sin(\alpha - \theta_{lim}) \\ \Leftrightarrow n \sin r &\geq n \sin(\alpha - \theta_{lim}) \\ \Leftrightarrow \sin i &\geq n \sin(\alpha - \theta_{lim}) \end{aligned}$$

L'angle i varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ donc, $\sin i$ varie comme i , d'où

$$\boxed{i \geq \arcsin(n \sin(\alpha - \theta_{lim}))}$$

Autrement dit, pour qu'il y ait émergence, l'angle d'incidence i doit être plus grand qu'un angle $i_0 = \arcsin(n \sin(\alpha - \theta_{lim}))$.

Pour que cet angle i_0 existe, il faut que son sinus soit inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \sin i_0 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow n \sin(\alpha - \theta_{lim}) &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \sin(\alpha - \theta_{lim}) &\leq \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow \sin(\alpha - \theta_{lim}) &\leq \sin \theta_{lim} \\ \Rightarrow \alpha - \theta_{lim} &\leq \theta_{lim} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \alpha \leq 2\theta_{lim}}$$

Qui est une condition nécessaire mais pas suffisante d'émergence. Pour avoir émergence, il faut, en plus, que l'angle d'incidence i soit tel que $i \geq i_0$.

5.3.3 Minimum de déviation

Les formules du prisme donnent quatre relations entre sept variables. Trois d'entre elles peuvent donc être choisies comme variables indépendantes.

En général, on prend comme paramètres les trois grandeurs directement accessibles à l'expérience, c'est-à-dire l'indice du prisme n ainsi que les angles α et i .

Pour calculer la variation de l'angle de déviation δ et déterminer la déviation minimale en fonction de l'angle d'incidence, il faudra résoudre l'équation $\frac{\partial \delta}{\partial i} = 0$. Autrement dit, il faudra dériver $\delta(\alpha, i, n)$ par rapport à i en considérant n et α comme des paramètres constants.

On a

$$\begin{aligned} D &= i' + i - \alpha \\ \Rightarrow \frac{\partial \delta}{\partial i} &= \frac{di'}{di} + 1 \end{aligned}$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r & \sin i' &= n \sin r' \\ \Rightarrow \cos i \, di &= n \cos r \, dr & \text{et} \Rightarrow \cos i' \, di' &= n \cos r' \, dr' \\ \Leftrightarrow di &= n \frac{\cos r}{\cos i} dr & \Leftrightarrow di' &= n \frac{\cos r'}{\cos i'} dr' \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{di'}{di} = \frac{n \cos r' \cos i \, dr'}{n \cos i' \cos r \, dr}$$

De plus, on a encore

$$\begin{aligned} \alpha &= r' + r \\ \Rightarrow 0 &= dr' + dr \\ \Leftrightarrow \frac{dr'}{dr} &= -1 \end{aligned}$$

Dès lors, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial i} &= 1 + \frac{di'}{di} \\ \Leftrightarrow 0 &= 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos i'}{\cos i} &= \frac{\cos r'}{\cos r} \end{aligned}$$

qui présente deux solutions triviales $\begin{cases} i = \pm i' \\ r = \pm r' \end{cases}$

La solution $i = -i'$ implique que $r = -r'$ et que donc $\alpha = r' + r = 0$, ce qui est une contradiction.

On choisira donc la solution $\begin{cases} i = i' \\ r = r' \end{cases}$ et la déviation présentera un minimum Δ pour $i = i' = i_{min}$ et $r = r' = r_{min}$.

On a donc, pour la déviation minimum,

$$\begin{aligned} \alpha &= r' + r = 2r_{min} \\ \Delta &= i' + i - \alpha = 2i_{min} - \alpha \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{r_{min} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad i_{min} = \frac{\alpha + \Delta}{2}}$$

La relation de Descartes $\sin i_{min} = n \sin r_{min}$ devient donc, pour le prisme,

$$\boxed{\sin \frac{\alpha + \Delta}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Cette formule permet de déterminer l'indice de réfraction n à partir des mesures de l'angle α du prisme et du minimum de déviation Δ .

5.3.4 Image d'un objet donnée par un prisme

Notons que l'image d'un objet sera nette si l'objet n'envoie que des rayons incidents proches de l'arête et si le rayon moyen du faisceau incident se trouve dans le plan de la section principale.

Dans ce cas, l'image d'un objet réel est virtuelle (et réciproquement) et située à égale distance de l'arête.

5.4 Lentilles sphériques minces

Les premières traces d'utilisation d'une lentille proviennent de la Grèce antique. Aristophane y fait notamment référence dans sa pièce *Les Nuées* écrite en 423 av. J.-C. en évoquant un verre à feu (une lentille convexe utilisée pour produire du feu en focalisant les rayons solaires). Les écrits de Pline l'Ancien (23 - 79) montrent également qu'un tel dispositif était connu dans l'empire romain. Ils mentionnent ce qui peut être interprété comme la première utilisation d'une lentille pour corriger la vue en décrivant l'utilisation que fait Nero d'une émeraude de forme convexe lors des spectacles de gladiateurs (probablement pour corriger une myopie). Sénèque le Jeune (3 av. J.-C. - 65) décrit l'effet grossissant d'un globe en verre rempli d'eau. Le mathématicien arabe Alhazen (965-1038), a écrit le premier traité d'optique qui décrit comment le cristallin forme une image sur la rétine.

Les lentilles n'ont cependant pas été utilisées par le grand public avant la généralisation des lunettes de vue, probablement inventées en Italie dans les années 1280.



FIG. 5.10 – Une lentille.

5.4.1 Généralités

Une *lentille* est un milieu homogène, isotrope, transparent, dont au moins l'une des faces n'est pas plane. En général, il s'agit d'un milieu limité par deux calottes sphériques.

Son utilisation implique que son indice de réfraction soit différent de celui du milieu dans lequel elle est plongée (air, huile, eau, ...). Les lentilles sont souvent réalisées en verre ou en matériau organique et possèdent la plupart du temps un axe de symétrie confondu avec l'axe optique.

Les centres C_1 , C_2 et les rayons R_1 , R_2 des calottes sphériques qui limitent les lentilles sont appelés respectivement *centres de courbure* et *rayons de courbure*.

Remarquons qu'un plan peut être considéré comme une calotte sphérique de rayon de courbure infini.

La droite qui joint les rayons de courbure est l'*axe principal* de la lentille. Il s'agit de son axe de symétrie de révolution.

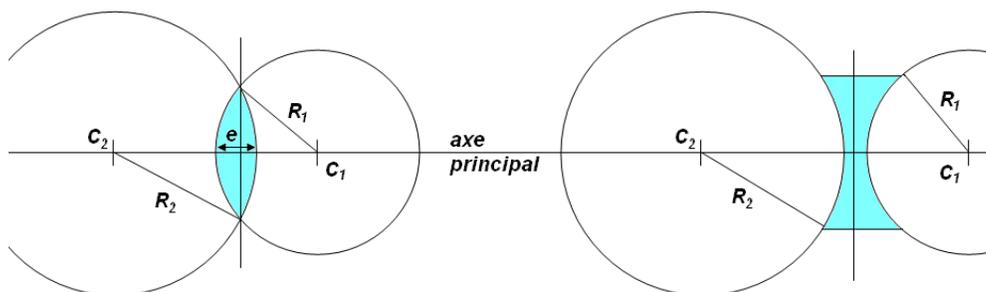


FIG. 5.11 – Exemple de lentilles définies par des calottes sphériques.

L'*épaisseur* e de la lentille se mesure sur l'axe principal. Il s'agit de la longueur du segment appartenant à l'axe principal et situé à l'intérieur de la lentille.

Une lentille est dite *mince* lorsque son épaisseur est petite par rapport aux rayons de courbure.

Autrement dit, une lentille mince est une lentille qui remplit les trois conditions suivantes :

1. l'épaisseur de la lentille est petite devant le rayon de la première face,
2. l'épaisseur de la lentille est petite devant le rayon de la deuxième face,
3. l'épaisseur de la lentille est plus petite que la valeur absolue de la différence entre le rayon de la première face et le rayon de la deuxième face.

Les lentilles épaisses n'ont pas les mêmes propriétés (aussi simples) que les lentilles minces.

On supposera aussi, sauf mention contraire, que les lentilles étudiées sont plus réfringentes que le milieu extérieur.

Classification

Selon la forme de ses faces d'entrée et de sortie, une lentille sera convergente ou divergente.

- Une lentille convergente transforme un faisceau de lumière parallèle en un faisceau qui converge vers un point situé en aval de la lentille.
- Une lentille divergente transforme un faisceau de lumière parallèle en un faisceau divergent qui semble provenir d'un point situé en amont de la lentille.

On distingue six types de lentilles sphériques :

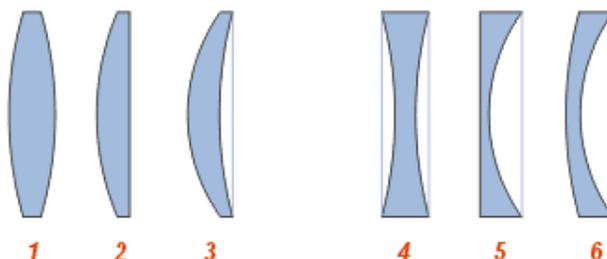


FIG. 5.12 – Classification des lentilles.

– Les lentilles convergentes :

(1) *lentille biconvexe* : les deux dioptries sont sphériques, les centres des sphères sont situés chacun d'un côté du plan de la lentille,

(2) *lentille plan-convexe* : un des dioptries est sphérique, l'autre est plan,

(3) *ménisque convergent* : les deux dioptries sont sphériques, les centres des sphères sont situés du même côté du plan de la lentille.

– Les lentilles divergentes :

(4) *lentille biconcave* : les deux dioptries sont sphériques, les centres des sphères sont situés chacun d'un côté du plan de la lentille,

(5) *lentille plan-concave* : un des dioptries est sphérique, l'autre est plan,

(6) *ménisque divergent* : les deux dioptries sont sphériques, les centres des sphères sont situés du même côté du plan de la lentille.

Le symbole en double flèche est utilisé dans le cas des lentilles minces, qui permet de simplifier les constructions grâce à certaines approximations lorsque l'on respecte les conditions de Gauss, c'est-à-dire lorsque les rayons qui frappent la lentille frappent à proximité du centre optique de la lentille et que leur direction est proche de l'axe optique.



FIG. 5.13 – Symbole en double flèche utilisé dans le cas des lentilles minces.

Un faisceau parallèle à l'axe principal tombant sur une lentille émergera

- en convergeant si la lentille est convergente (ou présente des bords plus minces que son épaisseur),
- en divergeant si la lentille est divergente (ou présente des bords plus épais que son épaisseur).

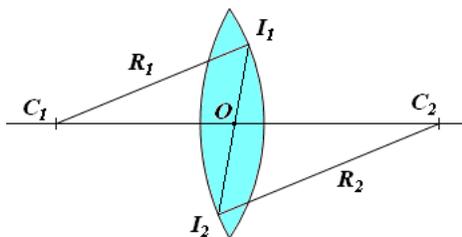
Centre optique

Le *centre optique* d'une lentille est le point d'intersection O de l'axe principal avec la droite I_1I_2 joignant les extrémités I_1 et I_2 de deux rayons de courbure parallèles.

Parmi les rayons incidents en I_1 , il existe un rayon qui traverse la lentille suivant I_1I_2 . Pour ce rayon passant par le centre optique, la lentille se comporte comme une lame à faces parallèles puisque les plans tangents à la lentille en I_1 et I_2 sont parallèles.

Les rayons incident et émergent sont donc parallèles.

Si la lentille est mince, le déplacement latéral est négligeable, le rayon ne subit donc aucune déviation. Réciproquement, tout rayon qui traverse la lentille sans subir de déviation passe par le centre optique de cette lentille.



En effet, les triangles C_1I_1O et C_2I_2O sont semblables et on a le rapport $\frac{|C_1O|}{|C_2O|} = \frac{|C_1I_1|}{|C_2I_2|} = \frac{R_1}{R_2} = C^{te}$.

Le point o divise donc le segment $[C_1C_2]$ en deux segments $[C_1O]$ et $[C_2O]$ dont le rapport est constant. Le point O est donc toujours le même, quels que soient les points I_1 et I_2 envisagés (avec $C_1I_1 \parallel C_2I_2$).

En conclusion, nous retiendrons que

Tout rayon lumineux passant par le centre optique d'une lentille mince ne subit aucune déviation.

Netteté de l'image

Une lentille convergente ou divergente ne donne une image nette que si les rayons incidents sont peu inclinés sur l'axe principal et traversent la lentille au voisinage du centre optique.

On considérera que ces conditions sont satisfaites et que les objets considérés ont tous leurs points dans un même plan perpendiculaire à l'axe principal, dans ce cas, l'image se forme aussi dans un plan perpendiculaire à l'axe principal.

5.4.2 Lentilles convergentes

Foyers principaux

Si l'on envoie un faisceau incident de rayons parallèles à l'axe principal sur une lentille mince convergente, on constate que le faisceau converge en un point situé sur l'axe principal. Ce point est appelé foyer principal de la lentille et comme les rayons y convergent effectivement, il s'agit d'un foyer réel.

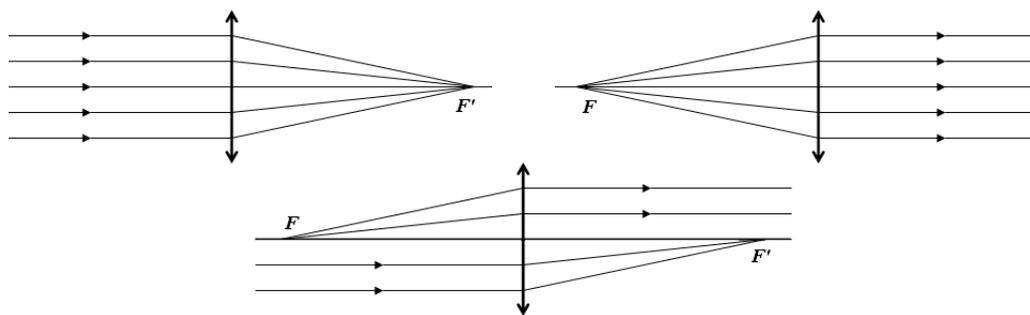


FIG. 5.14 – Foyer principal image (à gauche) et foyer principal objet (à droite)

Un faisceau de rayons incidents parallèle à l'axe principal, mais sur l'autre face de la lentille, converge en un deuxième foyer principal, symétrique du premier par rapport au centre optique O .

En conclusion, nous dirons que toute lentille mince convergente possède deux foyers principaux réels, symétriques par rapport au centre optique.

Pour un sens déterminé de propagation de la lumière, on peut préciser le rôle de ces foyers principaux.

Le foyer principal F' peut être considéré comme l'image d'un point A situé à l'infini dans la direction de l'axe principal. F' est appelé pour cette raison le *foyer principal image* de la lentille.

D'autre part, si une source ponctuelle est placée en F symétrique de F' par rapport au centre optique O , le faisceau émergent sera, suivant la loi du retour inverse de la lumière, parallèle à l'axe principal. On peut considérer le point F comme objet réel dont l'image est le point situé à l'infini dans la direction de l'axe principal. C'est pourquoi F est appelé *foyer principal objet*.

Il est évident que, si l'on inverse le sens de la propagation de la lumière, F' sera foyer objet et F foyer image.

De ces définitions des foyers découlent deux propriétés :

- Tout rayon incident parallèle à l'axe principal émerge de la lentille en passant par le foyer principal image.
- Tout rayon incident qui passe par le foyer principal objet émerge de la lentille parallèlement à l'axe principal.

Foyers secondaires et plans focaux

Un faisceau parallèle légèrement incliné sur l'axe principal converge en un point réel F'_1 que l'on appelle *foyer secondaire image*. En modifiant l'inclinaison du faisceau tout en gardant l'angle d'inclinaison petit, le foyer secondaire image se déplace dans une portion de plan perpendiculaire à l'axe principal en F' . Ce plan est appelé *plan focal image*.

À tout faisceau de rayons parallèles légèrement inclinés sur l'axe principal correspond un foyer secondaire image situé à l'intersection du plan focal image et du rayon incident passant par le centre optique qui traverse la lentille sans déviation. Le support d'un tel rayon est appelé *axe secondaire*.

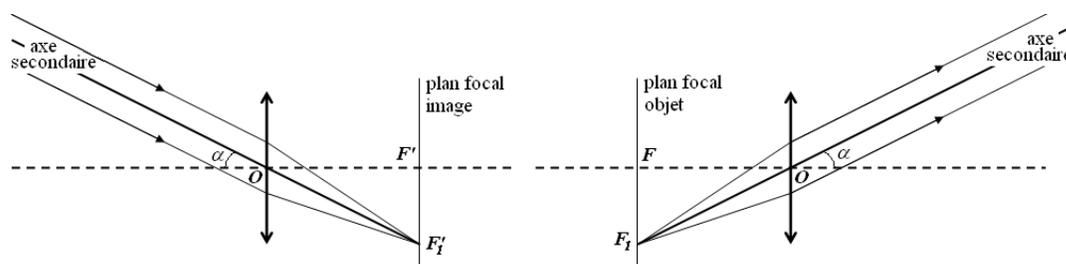


FIG. 5.15 – Foyer secondaire image (à gauche) et foyer secondaire objet (à droite).

D'autre part, si l'on déplace la source ponctuelle, située précédemment au foyer principal objet F dans un plan perpendiculaire à l'axe principal par le point F , on constate que le faisceau émergent issu de F_1 est parallèle à l'axe secondaire F_1O , à condition que ce dernier soit peu incliné sur l'axe principal.

Tout point objet réel tel que F_1 est un *foyer secondaire objet*. Le lieu des foyers secondaires objets constitue le *plan focal objet* de la lentille.

De ces définitions, découle deux propriétés similaires à celles des foyers principaux.

- Tout rayon incident parallèle à un axe secondaire OF'_1 émerge de la lentille en passant par le foyer secondaire image F'_1 .
- Tout rayon incident passant par un foyer secondaire objet F_1 émerge de la lentille parallèlement à l'axe secondaire F_1O .

Construction de l'image

Soit un objet AB perpendiculaire à l'axe principal et dont le point A se trouve sur l'axe principal. Son image $A'B'$ sera dans un plan perpendiculaire à l'axe principal, l'image A' de A étant située sur cet axe. Il suffit donc de connaître B' . On détermine sa position en cherchant l'intersection de deux rayons issus de B . On a le choix parmi

- le rayon BO qui traverse la lentille sans déviations,
- le rayon BF qui passe par le foyer principal F et émerge parallèlement à l'axe principal,
- le rayon BI parallèle à l'axe principal qui émerge en passant par le foyer principal F' .

L'objet peut être réel ou virtuel. Ce dernier peut être obtenu comme suit : on forme une image réelle AB au moyen d'une lentille L_1 . Puis on interpose une lentille mince convergente L_2 qui fait disparaître l'image AB . Cette dernière devient un objet virtuel pour la lentille L_2 qui l'empêche de se former.

L'image $A'B'$ de l'objet virtuel AB est réelle, droite, plus petite que l'objet et située entre la lentille et le plan focal image.

Pour rassembler les différents cas possibles, on déplace un objet réel de l'infini à la lentille puis le même objet devenu virtuel de la lentille à l'infini.

L'image est caractérisée par sa position, sa nature, son sens, sa grandeur.

Objet	Position de l'image	Nature de l'image	Sens de l'image	Grandeur de l'image
À l'infini	Dans le plan focal image	réelle	renversée	$A'B' \approx f'\alpha$
$p > 2f$	$f' < p' < 2f'$	réelle	renversée	$ A'B' < AB $
$f < p < 2f$	$p' > 2f'$	réelle	renversée	$ A'B' > AB $
$p = f$	à l'infini	réelle	renversée	$\alpha \approx \frac{ AB }{f}$
$p < f$	du même côté que l'objet	virtuelle	droite	$ A'B' > AB $
derrière la lentille (objet virtuel)	entre le plan focal et la lentille	réelle	droite	$ A'B' < AB $

Formules des lentilles

Les différents cas vus précédemment peuvent s'expliquer par une seule formule algébrique. On a

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}$$

où

- f' est la distance focale image,
- p' est la distance de la lentille à l'objet,
- p est la distance de la lentille à l'image,

avec la convention où l'on choisit comme sens positif sur l'axe principal, le sens de la lumière émergente (l'origine étant le centre optique, O).

Avec cette convention, les points objets réels ont une abscisse négative, les points image réels ont une abscisse positive. Réciproquement, les points objets virtuels ont une abscisse positive et les points image virtuels ont une abscisse négative.

La distance focale image f' est positive pour les lentilles convergentes, négative pour les lentilles divergentes.

Le *grandissement* γ est le rapport de la grandeur de l'image par rapport à la grandeur de l'objet. On a

$$\gamma = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{p'}{p}$$

D'après les conventions adoptées,

- si $-\infty < \gamma < -1$, alors l'image est renversée et plus grande que l'objet,
- si $-1 < \gamma < 0$, alors l'image est renversée et plus petite que l'objet,
- si $0 < \gamma < 1$, alors l'image est droite et plus petite que l'objet,
- si $1 < \gamma < +\infty$, alors l'image est droite et plus grande que l'objet.

5.4.3 Lentilles divergentes

Foyers et plans focaux

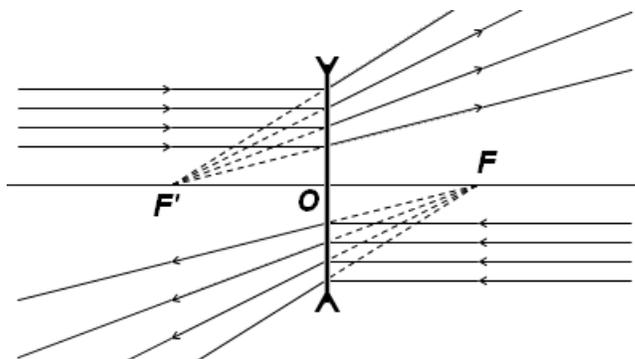


FIG. 5.16 – Lentille plan concave divergente.

Une lentille divergente possède deux foyers principaux virtuels symétriques par rapport au centre optique O . De leurs définitions découlent deux propriétés analogues à celles des lentilles convergentes.

1. Tout rayon parallèle à l'axe principal émerge de la lentille comme s'il venait du foyer principal image F' .
2. Tout rayon dont le support passe par le foyer principal objet F émerge de la lentille parallèlement à l'axe principal.

Une lentille divergente possède également deux plans focaux, lieux des foyers secondaires.

- Le plan focal image perpendiculaire à l'axe principal en F' se trouve du côté de la lumière incidente.
- Le plan focal objet perpendiculaire à l'axe principal en F est du côté de la lumière émergente.

Construction de l'image et Formules des lentilles

La méthode est identique à celle employée pour construire l'image d'un objet donnée par une lentille mince convergente.

Soit un objet AB perpendiculaire à l'axe principal et dont le point A se trouve sur l'axe principal. Son image $A'B'$ sera dans un plan perpendiculaire à l'axe principal, l'image A' de A étant située sur cet axe. Il suffit donc de connaître B' . On détermine sa position en cherchant l'intersection de deux rayons issus de B . On prendra

- le rayon BO qui traverse la lentille sans déviations,
- le rayon BI parallèle à l'axe principal qui émerge en provenant du foyer principal F' .

Pour rassembler les différents cas possibles, on déplace un objet réel de l'infini à la lentille puis le même objet devenu virtuel de la lentille à l'infini.

L'image est caractérisée par sa position, sa nature, son sens, sa grandeur.

Les conventions de signes sont identiques à celles des lentilles convergentes, la distance focale image f' est ici négative.

Objet	Position de l'image	Nature de l'image	Sens de l'image	Grandeur de l'image
$-\infty < p' < 0$ (objet réel)	Entre le plan focal image et la lentille	virtuelle	droite	$ A'B' < AB $
$0 < p' < f$ (objet virtuel)	Entre la lentille et l'infini	réelle	droite	$ A'B' > AB $
$f < p' < \infty$ (objet virtuel)	$-\infty < p < 2f'$ $2f' < p < f'$	virtuelle	renversée	$ A'B' > AB $ $ A'B' < AB $

Les formules des lentilles sont, elles aussi identiques à celles des lentilles convergentes (en considérant f' négative) :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$$

Pour résumer, en optique, on utilise des distances algébriques, le sens de propagation de la lumière étant par convention le sens positif. On discerne deux distances focales :

$$f = |OF| \text{ et } f' = |OF'|$$

où O est le centre optique de la lentille.

La distance algébrique f' est positive si F' est situé en aval de la lentille (lentille convergente) et négative si F' est en amont de la lentille (lentille divergente).

On considère une onde lumineuse se propageant selon un sens donné. Le demi-espace situé en amont de la lentille par rapport à ce sens de propagation est appelé *espace objet*. Le demi-espace situé en aval de la lentille est appelé *espace image*.

Si AB est un objet situé en aval de la lentille, AB est un objet virtuel et p est positif. Si AB est un objet réel situé en amont de la lentille, cette distance est négative. Pour une image réelle $A'B'$ située

en aval de la lentille, p' est positif, et pour une image virtuelle située en amont de la lentille, p' est négatif.

5.5 Focométrie

La détermination expérimentale de la distance focale f' d'une lentille optique s'appelle la focométrie.

Il s'agit plus généralement de la détermination des foyers et plans principaux d'un système centré, c'est-à-dire un système de dioptries et miroirs dont les axes principaux coïncident.

On appelle *vergence* C d'une lentille mince, l'inverse de sa distance focale image f' .

$$C = \frac{1}{f'}$$

Il résulte des conventions de signes adoptées que la vergence d'une lentille convergente est positive et celle d'une lentille divergente est négative.

L'unité de vergence est la *dioptrie* δ . On obtient la vergence en dioptrie en exprimant la distance focale en mètres.

Une dioptrie (1δ) correspond à une lentille dont la distance focale vaut 1 mètre dans un milieu dont l'indice de réfraction $n = 1$.

5.5.1 Vergence d'un système de lentilles minces accolées

Considérons n lentilles minces accolées L_1, L_2, \dots, L_n de même axe principal. Leurs centres optiques respectifs O_1, O_2, \dots, O_n peuvent être confondus en un point unique O qui est le centre optique de l'ensemble du système.

Soit A un point objet sur l'axe principal, ses images successives dans les $n - 1$ lentilles sont A_1, A_2, \dots, A_{n-1} et l'image définitive A' est donnée par la $n^{\text{ème}}$ lentille.

Un objet AB perpendiculaire à l'axe principal a pour images successives $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_{n-1}B_{n-1}, A'B' = A_nB_n$.

Posons $OA = p$, $OA_1 = p_1$, $OA_2 = p_2$, ..., $OA_{n-1} = p_{n-1}$ et $OA_n = OA' = p' = p_n$. En appliquant les formules des lentilles à chacune d'entre elles, on obtient

$$\begin{array}{lll} L_1 & \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'_1} & \gamma_1 = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{p_1}{p} \\ L_2 & \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f'_2} & \gamma_2 = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{p_2}{p_1} \\ L_3 & \frac{1}{p_3} - \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f'_3} & \gamma_3 = \frac{A_3B_3}{A_2B_2} = \frac{p_3}{p_2} \\ \dots & & \\ L_{n-1} & \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_{n-2}} = \frac{1}{f'_{n-1}} & \gamma_{n-1} = \frac{A_{n-1}B_{n-1}}{A_{n-2}B_{n-2}} = \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \\ L_n & \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_{n-1}} = \frac{1}{f'_n} & \gamma_n = \frac{A_nB_n}{A_{n-1}B_{n-1}} = \frac{p_n}{p_{n-1}} \end{array}$$

En additionnant membre à membre les équations donnant la distance focale et en multipliant membre à membre les formules du grandissement, on a

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} + \dots + \frac{1}{f'_n} \quad \text{et} \quad \frac{A_n B_n}{AB} = \frac{p_n}{p}$$

Autrement dit, le système de lentilles minces accolées est équivalent à une seule lentille mince de centre optique O , de distance focale f' telle que

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f'_i}}$$

En désignant par $C_i = \frac{1}{f'_i}$ la vergence de chacune des n lentilles L_i et par $C = \frac{1}{f'}$ la vergence de la lentille mince équivalente, on a

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^n C_i}$$

Cette propriété constitue le *théorème des vergences* qui stipule qu'un système de lentilles minces accolées est équivalent à une lentille unique, de même centre optique, dont la vergence est égale à la somme algébrique des vergences de chacune des lentilles.

En optique géométrique, la vergence est donc une grandeur qui sert à caractériser les propriétés de focalisation d'un système. C'est une grandeur algébrique, qui peut donc être positive (système convergent) ou négative (système divergent). Elle s'exprime comme l'inverse d'une longueur, en dioptrie (δ).

L'intérêt essentiel de cette grandeur est finalement qu'il est facile de calculer la vergence d'un système optique connaissant les vergences des éléments qui le composent. Notamment, lorsque deux lentilles minces sont accolées l'une à l'autre, la vergence de l'ensemble est la somme des vergences des deux lentilles.

5.5.2 Calcul de la vergence d'une lentille mince

La vergence d'une lentille mince est liée d'une part à la forme (concave, convexe, plane) et aux rayons de courbure de ses faces, d'autre part à son indice n de réfraction par rapport au milieu ambiant.

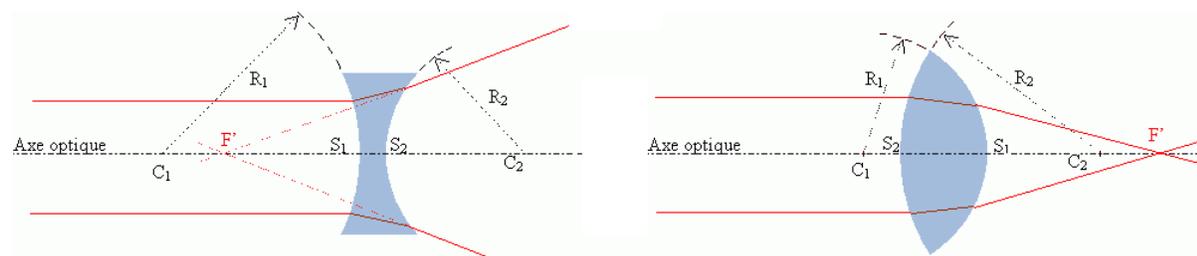


FIG. 5.17 – Lentille divergente (à gauche) et convergente (à droite)

On considère généralement qu'une lentille est mince si l'épaisseur séparant les deux dioptries qui la composent est négligeable devant le rayon des dioptries ainsi que devant la différence des rayons des dioptries. Dans le cas simple où cette lentille est plongée dans l'air on a

$$\boxed{C = \frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

Où $n = \frac{n_{\text{lentille}}}{n_{\text{exterieur}}}$ est l'indice relatif de la lentille, et en convenant de compter positivement le rayon de courbure d'une face convexe et négativement le rayon de courbure d'une face concave.

5.5.3 Mesure de la vergence d'une lentille mince

1. Méthode du sphéromètre

On mesure les rayons de courbure R_1 et R_2 des deux faces de la lentille à l'aide d'un sphéromètre. Si l'on connaît l'indice de réfraction de la lentille, on peut déterminer sa vergence grâce à la formule $C = (n - 1)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$.

Pour déterminer la vergence, il faut donc aussi connaître l'indice de réfraction de la lentille. Les opticiens utilisent un sphéromètre à cadran. L'appareil possède trois pointes. La pointemédiane est mobile et commande la rotation de l'aiguille du cadran. Cette rotation est proportionnelle à l'inverse du rayon de courbure $\frac{1}{R}$. Le cadran est gradué de manière à donner directement $(n - 1)\frac{1}{R}$ en dioptries δ , l'indice n étant pris en général égal à 1,53 qui est l'indice moyen des verres de lunettes.

Pour déterminer la vergence d'une lentille, on applique simplement le sphéromètre à cadran sur chacune des faces et on ajoute algébriquement les lectures faites en comptant positivement le chiffre lu pour une face convexe, négativement pour une face concave.

La précision de ce procédé est de l'ordre de $0,1 \delta$.

2. Méthode du plan focal

Cette méthode consiste à déterminer le plan focal d'une lentille en cherchant où il faut placer un écran pour obtenir une image nette d'un objet très éloigné. On mesure ensuite la distance de l'écran à la lentille, c'est-à-dire la distance focale.

Cette méthode, qui n'est applicable qu'aux lentilles convergentes puisque le foyer image doit être réel, est très commode mais peu précise.

3. Méthode des points conjugués

On détermine la position de l'objet ($OA = p$) et celle de l'image ($OA' = p'$) par rapport à la lentille. L'équation de conjugaison $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ permet de calculer la vergence $C = \frac{1}{f'}$.

La méthode n'est commode que lorsque l'objet et l'image sont réels, ce qui n'est jamais le cas pour une lentille divergente.

4. Méthode de Silbermann

La méthode de Silbermann est un cas particulier de la méthode des points conjugués où l'on place un objet A à une distance $2f$ de la lentille à la suite de quoi la distance AA' vaut $4f$.

Cette méthode est relativement précise car elle ne nécessite qu'une seule mesure, à savoir celle de la distance objet-image AA' .

En pratique, on prend comme objet une graduation fortement éclairée et on reçoit l'image sur un écran constitué par un verre dépoli sur lequel on a gravé une graduation identique à celle de l'objet. On cherche où il faut placer l'objet pour que les traits de l'image prolongent exactement ceux du verre dépoli.

Cette méthode peut servir aussi pour déterminer la vergence C d'une lentille divergente en lui accolant une lentille de convergence C_1 suffisante pour que le système soit convergent. Soit C la vergence du système, on a $C = C_1 + C_2$, d'où $C_2 = C - C_1$.

5. Méthode de Bessel

La méthode de Bessel n'est applicable qu'aux lentilles convergentes. On déplace une lentille entre un objet fixe AB et un écran fixe E . Il existe deux positions L_1 et L_2 de la lentille pour lesquelles l'image de l'objet se forme sur l'écran.

On considère une lentille mince convergente de focale f' , de centre O , de foyers image F' et objet F . On suppose que $A'B'$ est réelle (c'est-à-dire projetable sur un écran), ce qui implique que $|OA'| > 0$. Il faut pour cela que AB soit placé sur l'axe optique à une distance $|OA| < -f'$.

Soient D , la distance entre l'objet AB (sur l'axe optique) et l'écran (où l'on visualise l'image $A'B'$), et d , la distance entre les deux positions de la lentille qui assurent la conjugaison de A et A' , (c'est-à-dire la netteté de l'image sur l'écran). On peut déduire la valeur de la focale f' par la formule

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

En effet, on a

$$D = |OA'| - |OA|$$

et

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{|OF'|} = \frac{1}{|OA'|} - \frac{1}{|OA|} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$$

Dès lors, il vient

$$|OA'| = \frac{f'|OA|}{f' + |OA|} = D - |OA|$$

qui peut encore s'écrire

$$|OA|^2 + D|OA| + f'D = 0$$

qui est une équation du second degré en $|OA|$ dont le discriminant $\Delta = D^2 - 4f'D$ doit être positif pour que celle-ci admette une solution. Nous avons donc

$$D^2 - 4f'D > 0 \Leftrightarrow D > 4f'$$

Si $D > D_{min} = 4f'$, alors $\Delta > 0$ et il y a deux solutions réelles. Il existe alors deux positions de la lentille qui permettent de conjuguer A et A' .

Les solutions sont

$$|OA|_{\pm} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4f'D}}{2}$$

Aussi, ces deux positions possibles de l'objet sont éloignées de

$$||OA|_+ - |OA|_-| = \sqrt{D^2 - 4f'D}$$

Cette distance est aussi la distance entre les deux positions de la lentille qui assurent la conjugaison de A et A' . On a finalement

$$d = ||OA|_+ - |OA|_-| = \sqrt{D^2 - 4f'D}$$

En élevant au carré, on trouve

$$d^2 = D^2 - 4f'D \Leftrightarrow f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

Remarquons que la méthode de Silbermann apparaît comme un cas particulier de la méthode de Bessel, celui où la position de la lentille est unique (soit $d = 0$).

6. Méthode de Badal

La méthode de Badal est une méthode focométrique de détermination expérimentale de la focale d'une lentille divergente.

On considère une lentille mince divergente de focale f' inconnue, de centre O , de foyers image F' et objet F . Pour déterminer cette focale f' , on va faire deux montages successifs.

On utilise deux lentilles convergentes L_1 et L_2 de foyers objets respectifs F_1 et F_2 , et de foyers images respectifs F'_1 et F'_2 .

On met un objet A sur l'axe optique au foyer objet F_1 de la première lentille L_1 . Son image se trouve en $A' = F'_2$, le foyer image de L_2 .

On intercale entre les deux lentilles convergentes la lentille divergente L de distance focale f' inconnue au foyer objet F_2 de L_2 . La nouvelle image de A se trouve en A'' .

Pour déterminer la focale inconnue f' de la lentille divergente, il suffit ensuite de mesurer la distance $A'A''$ entre les deux images successives, et de se souvenir de la focale de la seconde lentille convergente ($f'_2 = 0_2A'$), en utilisant la relation

$$f' = \frac{-f'_2{}^2}{A'A''}$$

(sans démonstration)

7. Méthode d'autocollimation

L'autocollimation est une méthode permettant de déterminer la position du foyer d'un système optique. Elle nécessite, en plus du système, l'utilisation d'un miroir plan et d'une source ponctuelle de lumière.

Dans le cas d'une lentille convexe, celle-ci est placée entre le miroir et la source de lumière. On obtient donc, par réflexion, une image de la source de lumière du côté de celle-ci. On déplace alors la lentille jusqu'à ce que la source de lumière coïncide avec sa propre image réfléchie. La distance entre la lentille et la source de lumière est alors la distance focale de la lentille.

Il s'agit d'une méthode précise et commode pour déterminer la position du plan focal objet d'une lentille convergente.

En pratique, on place un miroir plan derrière la lentille, perpendiculairement à l'axe principal et on cherche où il faut placer une fente lumineuse pour que son image A' se forme dans le plan de front de la fente. Quand cette condition est réalisée, il y a autocollimation, le faisceau lumineux qui arrive sur le miroir est cylindrique, et la fente objet A se trouve dans le plan focal.

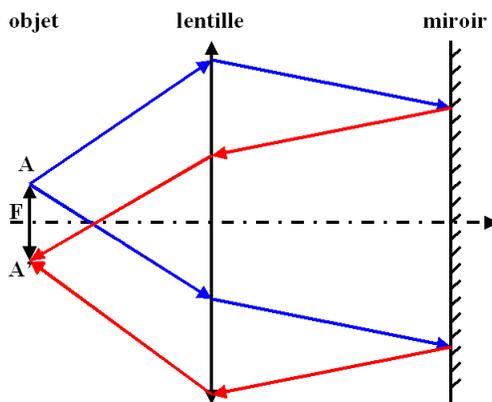


FIG. 5.18 – Principe de la méthode d'autocollimation.

5.6 Défauts des lentilles

5.6.1 Chromatisme

Le chromatisme d'un milieu correspond à la variation de l'indice optique du milieu en fonction de la longueur d'onde de la lumière. La loi de réfraction de Descartes faisant intervenir l'indice optique des milieux, la réfraction s'appliquera donc de façon différente en fonction de la longueur d'onde. On observe donc une variation de la déviation des rayons lumineux due au chromatisme. Ce phénomène est à l'origine de la dispersion de la lumière blanche par un prisme (optique) produisant les rayonnements de l'arc-en-ciel.

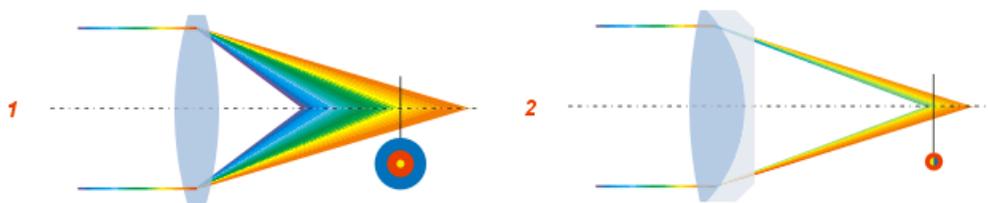


FIG. 5.19 – L'aberration chromatique obtenue (en 1) peut être corrigée par l'ajout d'une deuxième lentille (en 2)

En effet, l'indice de réfraction n varie avec la longueur d'onde de la lumière et par conséquent la distance focale dépend aussi de la longueur d'onde, par la relation

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Le foyer d'une lentille en lumière rouge est distinct du foyer en lumière violette. L'image rouge ne se superpose pas à la violette et lorsqu'on utilise de la lumière blanche, il y a *irisation* des images.

5.6.2 Coma

Il s'agit d'une aberration qui a pour effet de détruire la symétrie centrale de l'image d'un point qui prend donc la forme d'un V.

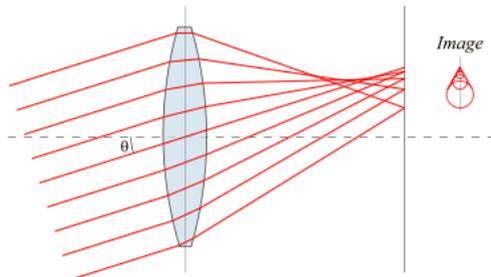


FIG. 5.20 –

En effet, lorsqu'on envoie sur une lentille un faisceau cylindrique fortement incliné sur l'axe principal, il ne converge pas en un point unique, mais en des points situés sur deux droites orthogonales (gauches et perpendiculaires). Ces droites sont appelées *lignes focales*.

5.6.3 Astigmatisme

L'astigmatisme est un défaut des systèmes optiques qui ne donnent pas d'un point une image ponctuelle, mais une tache.

En physiologie de l'oeil, normalement, la surface de la cornée présente la courbure d'un ballon de football. Chez les astigmates, elle est déformée et sa courbure s'apparente davantage à celle d'un ballon de rugby. L'image reçue par la rétine est donc différente selon les axes de ce ballon. Résultat : l'image manque de netteté. Les rayons lumineux se focalisent alors en des points différents en arrière et en avant de la rétine ce qui provoque une déformation de l'image. On parle d'astigmatisme interne pour la déformation des éléments optiques internes à l'oeil comme le cristallin et la face interne de la cornée.

5.6.4 Sphéricité

L'aberration sphérique désigne une aberration dont l'une des conséquences est la disparition du foyer. Les rayons provenant du bord et du centre de l'optique ne se focalisent plus au même point. On observe alors une *caustique de focalisation* (ou de réfraction), dans laquelle le point image attendu sera remplacé par un halo plus ou moins flou.

Pour une lentille sphérique, les rayons se trouvant au bord de la lentille focalisent à une place légèrement différente des rayons se trouvant au centre : l'image d'un point est donc une tache floue.

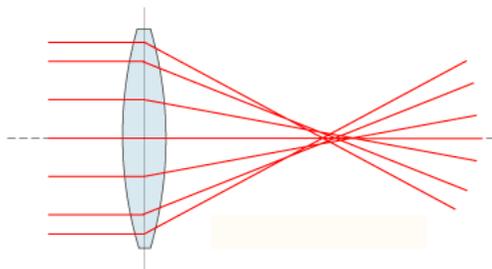


FIG. 5.21 –

En effet, un faisceau de rayons parallèles ne converge rigoureusement au foyer que si les rayons sont peu éloignés de l'axe principal. Si ce n'est pas le cas, les rayons éloignés de l'axe principal le couperont en des points plus rapprochés de la lentille que les rayons centraux.

Ce défaut des lentilles nuit donc à la netteté de l'image.

Il est clair qu'une surface sphérique n'est pas la forme idéale pour réaliser une lentille. Il s'agit cependant de la forme la plus simple à polir, aussi elle reste très souvent utilisée.

L'aberration sphérique peut être minimisée en choisissant soigneusement une courbure particulière de la surface de la lentille. On utilise des lentilles non-sphériques que l'on nomme lentilles asphériques, utilisables pour des applications particulières bien déterminées.

Chapitre 6

Instruments d'optique

6.1 L'oeil

6.2 La loupe

6.3 Le microscope

6.4 L'appareil photographique

Quatrième partie

Mécanique rationnelle

Dans le langage courant, la mécanique est le domaine des machines, moteurs, véhicules, organes (engrenages, poulies, courroies, vilebrequins, arbres de transmission, pistons, ...), bref, de tout ce qui produit ou transmet un mouvement, une force, une déformation.

On parle ainsi de mécanique automobile, mécanique rationnelle, mécanique quantique, mécanique relativiste, etc.

Selon Newton, son créateur, la science mécanique est la fusion de la physique et de l'astronomie. Du point de vue historique, donc, la physique est une partie de la mécanique.

Actuellement, la mécanique est la branche de la science qui étudie le mouvement des systèmes matériels et leurs déformations, en relation avec les forces qui provoquent ou modifient ce mouvement ou ces déformations. Elle peut être considérée comme une partie de la physique. Elle a donc pour but de décrire et prévoir les mouvements de matières inertes, de corps célestes ou quantiques ou d'organismes vivants (biomécanique) et comprend notamment :

- La mécanique classique, dite aussi newtonienne, qui traite de l'étude cinématique (étude du mouvement sans s'intéresser à sa cause), statique et dynamique d'un système, que ce soit un système simple (mécanique du point) ou un système complexe (mécanique générale).
- La mécanique céleste étudie les mouvements des corps célestes.
- La mécanique statistique étudie des systèmes à grand nombre de composants, comme par exemple les gaz, composés de milliards de molécules.
- La mécanique physique traite les systèmes qui ont des comportements physiques comme la mécanique des fluides, la mécanique des milieux continus, correspondant à une mécanique des systèmes déformables.
- La mécanique quantique traite du comportement des systèmes physiques à l'échelle des particules.
- La mécanique relativiste traite les systèmes se déplaçant à des vitesses proches de celle de la lumière.
- La mécanique statique est la branche de la physique qui étudie les systèmes mécaniques au repos dans un repère galiléen.
- La biomécanique traite de la déformation des corps vivants, notamment du corps humain par exemple en situation de chocs (ex : crash véhicule) ou d'accélération importantes (ex : combat aérien).
- L'acoustique physique est la branche de la mécanique qui étudie les petits mouvements de vibration dans les solides, les liquides ou les gaz.
- La mécatronique traite de l'ingénierie d'objets mécaniques actifs, dont la cinématique, les déformations, les comportements dynamiques sont mesurés voire contrôlés par des dispositifs électroniques (ex : capteurs, calculateurs, actionneurs) et numériques (ex : logiciels).

Avant de devenir une science à part entière, la mécanique a longtemps été une section des mathématiques.

De nombreux mathématiciens y ont apporté une contribution souvent décisive, parmi eux des grands noms tels que Euler, Cauchy, Lagrange, ... Jusqu'à la fin du XVIII^e siècle, la mécanique a été le domaine applicatif naturel des mathématiques, le domaine dans lequel on pouvait tenter de faire entrer les faits ex-

périmentaux dans le cadre rigoureux des mathématiques. Inversement, certains problèmes de mécanique ont donné naissance ou orienté l'intérêt des mathématiciens vers des théories telles que la géométrie ou les équations différentielles.

La mécanique classique peut en effet être écrite (formalisée) de différentes manières. La plus courante est la formulation de Newton, qui utilise la notion de force. Elle est de loin la plus simple lorsqu'il s'agit de considérer un problème concret et c'est pourquoi c'est celle qui est enseignée. Mais pour pouvoir traiter des problèmes plus complexes ou plus finement, et pour pouvoir faire des démonstrations rigoureuses, cette formulation n'est pas la plus pratique.

La mécanique analytique, initiée dès le XVIII^e siècle, regroupe ainsi différentes formulations très mathématisées de la mécanique classique, notamment les mécaniques de Hamilton et de Lagrange. Toutes ces formulations sont équivalentes.

Historiquement, la mécanique statique a été le premier domaine étudié par les savants. De l'antiquité jusqu'au Moyen Âge des notions fondamentales telles que l'équilibre, le célèbre bras de levier d'Archimède ou encore la notion beaucoup plus abstraite de force ont été étudiées. Plus tard, l'intérêt s'est porté vers la dynamique, c'est-à-dire les phénomènes qui régissent le mouvement des solides, domaine dans lequel Galilée, pour la chute des corps, et Newton dans ses célèbres *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ont apporté des contributions décisives.

Le positivisme du philosophe Auguste Comte pesa lourd en France sur le contenu de l'enseignement scientifique, la mécanique étant par exemple du ressort des professeurs de mathématiques et non des physiciens. La mécanique rationnelle s'est substituée très longtemps, dans l'enseignement, à la mécanique. Elle présentait plusieurs avantages. Peu onéreuse, elle ne nécessitait qu'un papier et un crayon, au lieu de coûteuses expériences et démonstrations en laboratoire. Elle permettait de renforcer le cours de mathématiques, sous couleur de physique.

Elle véhiculait tacitement les idées suivantes :

- Qu'il y a des vérités définitives en sciences.
- Que la forme aboutie de la connaissance scientifique est mathématique.
- Que tous les phénomènes de la nature sont réductibles à un principe de conservation (ou d'invariance) très général, de nature plus ou moins déiste¹.

On cherchait en effet dès la deuxième moitié du XVIII^e siècle à expliquer le progrès de l'esprit humain par le développement des « sciences positives » telles que les mathématiques, physique, chimie, etc.

Le courant philosophique du positivisme commença à se structurer en France dans la première moitié du XIX^e siècle. Ce terme fut propagé par Saint-Simon² et encore davantage popularisé en philosophie par Auguste Comte, qui travailla étroitement avec Saint-Simon, dont il fut le secrétaire de 1817 à 1824.

¹Le déisme, est la croyance en un Dieu créateur, mais pas en son instrumentalisation religieuse. Les déistes ne croient ni aux prêtres, ni à une « Église », ni à des textes sacrés ou des messies. Le déisme consiste donc en l'affirmation, hors de toute révélation religieuse, de l'existence d'un être suprême dont la nature et les propriétés restent inconnues.

²Claude Henri de Rouvroy, comte de Saint-Simon

Le positivisme scientifique d'Auguste Comte affirme que l'esprit scientifique va, par une loi inexorable du progrès de l'esprit humain, appelée loi des trois états, remplacer les croyances théologiques ou les explications métaphysiques.

En devenant « positif », l'esprit renoncerait donc à la question « pourquoi ? », c'est-à-dire à chercher les causes premières des choses. Il se limiterait au « comment », c'est-à-dire à la formulation des lois de la nature, exprimées en langage mathématique, en dégagant, par le moyen d'observations et d'expériences répétées, les relations constantes qui unissent les phénomènes, et permettent d'expliquer la réalité des faits.

Le positivisme religieux, correspond à une deuxième phase de la pensée d'Auguste Comte, assez différente de la première. Dans cette période, la pensée de Comte dérive vers une pensée pseudo-religieuse (religion de l'humanité) fondée sur une sorte de culte des morts : Comte est le « grand-prêtre » de l'humanité, la société est dirigée par les scientifiques, l'Humanité est un Grand-Être ...

C'est une théorie qui établit des relations en société sur la base de lois scientifiques et techniques, supposées apporter l'ordre, le progrès, l'amour au sens de l'altruisme. Elle fait abstraction de la recherche sur le sens de la vie, les origines et les fins de l'Homme, le bonheur ...

Les thèses développées par Comte vers le milieu du XIX^e siècle ne sont plus vraiment applicables à la recherche scientifique de ces dernières décennies. Une insatisfaction créée par la mécanique quantique chez les physiciens vient précisément du fait que nous disposons de tous les moyens de prédire le comment sans avoir de modèle nous suggérant le pourquoi sous-jacent. Il en va de même pour la physique des particules. Pourquoi ces charges et masses de particules et pas d'autres ? Pourquoi ces constantes universelles et pas d'autres ? Pourquoi ces lois de la physique et pas d'autres ?

Refuser d'envisager ces questions serait mettre fin au processus de recherche en physique, ainsi qu'à une chance d'assouvir la très grande curiosité humaine en ce domaine. Ce serait aussi le moyen assuré de n'en jamais trouver les réponses, si réponses il y a.

Au début du XX^e siècle, Einstein a développé sa célèbre théorie de la relativité et a mis en évidence les insuffisances de la mécanique telle qu'elle a été décrite par Newton. Toutefois, il s'avère que cette dernière constitue un cas particulier de la théorie de la relativité dès lors que l'on considère des vitesses relativement faibles. On a alors défini la mécanique newtonienne, ou mécanique classique, comme le domaine de la physique qui décrit les mouvements des corps à des vitesses faibles devant celle de la lumière (soit très inférieures à 300 000 km/s environ). Dans ce domaine, tout en étant plus simple, elle fournit des résultats très voisins de ceux de la relativité restreinte, adaptée quant à elle à tous les domaines de vitesse.

Conceptuellement, la mécanique a donc connu trois révolutions :

1. la prise de conscience que c'est l'accélération qui est proportionnelle à la force (on pensait initialement que c'était la vitesse),
2. la prise de conscience que le mouvement des planètes est régi par le même phénomène que la chute des corps, la fameuse attraction universelle de Newton,
3. la modélisation de la gravitation non plus par une force, mais par une déformation de l'espace avec la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Chapitre 7

Calcul vectoriel

Pour étudier la mécanique, nous allons développer un outil relativement abstrait car il nous permettra d'identifier une vitesse, une trajectoire, une accélération, une force, bref tout ce qui pourrait concerner un déplacement, sans notion de masse, ni de temps.

Cet outil, le *calcul vectoriel*, fut développé dans les débuts du XIX^e siècle dans le but de faciliter les calculs géométriques. La géométrie est donc rendue plus calculatoire que démonstrative par l'emploi des vecteurs.

7.1 Scalaires et vecteurs

En mathématiques, le vecteur est un objet véhiculant plus d'information que les nombres usuels, ou scalaires, et sur lequel on peut effectuer des opérations simples.

À l'origine, un vecteur est un objet de la géométrie euclidienne. À deux points, Euclide faisait seulement correspondre leur distance. Or un couple de points porte une charge d'information bien plus grande. Ils définissent aussi une direction et un sens. Le vecteur synthétise l'ensemble de ces informations.

La notion de vecteur peut être définie en dimension 2 (vecteur du plan), 3 (vecteur de l'espace euclidien usuel). Elle se généralise à des espaces de dimension n , ou à des espaces de dimension infinie. C'est sur cette notion, devenue abstraite, que se fonde la branche des mathématiques appelée algèbre linéaire.

7.1.1 scalaire :

Le mot scalaire provient du latin *scala* qui signifie échelle. C'est une quantité qui a une magnitude mais pas de direction, à l'opposé des vecteurs. Symboliquement, on le représente en général par une lettre.

En mathématiques, un scalaire est un « élément de l'anneau de base d'un module ou du corps de base d'un espace vectoriel ». En clair, c'est souvent un nombre réel ou complexe.

En physique, un scalaire est une quantité pouvant être décrite par un seul nombre et l'unité correspondante. Les quantités scalaires sont invariantes par rapport aux rotations de coordonnées. Une température, une masse, une hauteur sont des scalaires.

En bref, - **définition** - une grandeur scalaire, ou un scalaire plus simplement, s'exprime par un nombre réel (ou complexe) accompagné de ses unités.

Remarquons, juste pour l'information, que le scalaire (*Pterophyllum scalare*) est aussi un poisson de la famille des cichlidés.

7.1.2 Vecteur (lié) :

La vitesse d'un objet en revanche est un vecteur : elle est définie par un scalaire associé à une direction. De même pour l'accélération d'un objet.

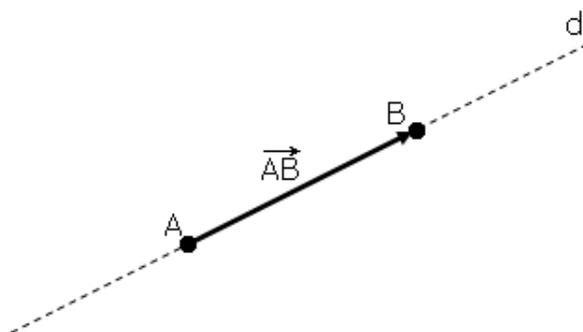


FIG. 7.1 – Vecteur lié \vec{AB}

Le mot « vecteur » vient de l'indo-européen *vag*, ou *vagh*, qui désignait le chariot, et qui a laissé quelques centaines de descendants dans les langues indo-européennes. En latin, « vector » désigne le conducteur d'un chariot. Le réemploi de ce mot en mathématiques date de 1837, à l'initiative de William Hamilton.

Le vecteur est, en physique, ce qui permet de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre seul ou une fonction numérique seule. Par exemple, pour préciser une vitesse, une force, un champ électrique, il faut aussi connaître la direction et le sens. Les vecteurs s'opposent aux grandeurs scalaires qu'on peut décrire par un simple nombre, comme la masse, la température, la densité, etc.

En bref, - (**définition**) - un vecteur lié \vec{AB} est un segment de droite $[AB]$ orienté caractérisé par les 4 propriétés suivantes (voir schéma 7.1) :

1. \vec{AB} possède une origine A
2. \vec{AB} possède une droite de support d qui définit sa direction

3. \vec{AB} possède un sens défini par la demi-droite $[AB$
4. \vec{AB} possède une magnitude définie par la longueur du segment $|AB|$

Par abus de langage, toute entité mathématique possédant ces quatre propriétés est étiqueté « vecteur¹ ».

Vecteurs équipolents

Deux vecteurs liés \vec{AB} et \vec{CD} sont équipolents s'ils représentent le même vecteur libre. On note

$$(A, B) \uparrow (C, D)$$

ou, de manière moins formelle, $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Autrement dit, les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont équipolents ssi le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (voir schéma 7.2).

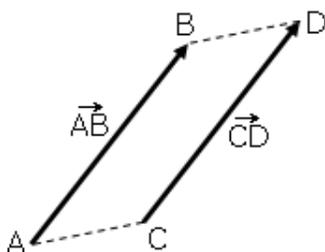


FIG. 7.2 – Vecteurs équipolents \vec{AB} et \vec{CD} : $ABCD$ est un parallélogramme.

7.1.3 Vecteur libre :

Dans le cadre d'un espace à 3 dimensions, un champ de vecteurs associe à chaque point de l'espace un vecteur (à trois composantes réelles), tandis qu'un champ de scalaires y associe un réel. Imaginons par exemple l'eau d'un lac. La donnée de sa température en chaque point forme un champ de scalaires, celle de sa vitesse en chaque point, un champ de vecteurs libres.

On peut donc se représenter un vecteur libre comme une flèche dont l'emplacement dans le plan n'a pas d'importance, seuls comptent sa longueur, sa direction et son sens.

En bref, - (**définition**) - un vecteur libre \vec{a} est un vecteur dont l'origine n'est pas fixe (voir schéma 7.3).

¹Selon la source bibliographique, un vecteur sera symboliquement représenté par la notation \vec{a} , \vec{AB} , \bar{a} , \bar{AB} , \mathbf{a} ou \mathbf{AB} .

Remarquons que, pour deux vecteur libres \vec{a} et \vec{b} , dire que ceux-ci sont « égaux » ou « équipolents » est équivalent.

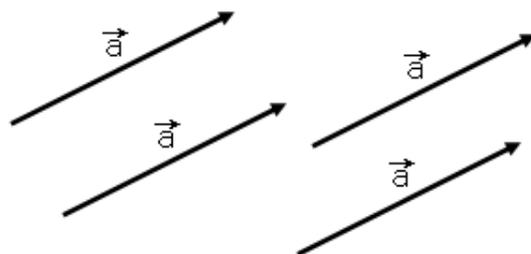


FIG. 7.3 – Vecteur libre \vec{a}

7.1.4 Vecteur glissant :

Prenons maintenant l'exemple d'un wagon posé sur des rails. Qu'on pousse ou qu'on tire le wagon, celui-ci avancera. Si on représente la force agissant sur ce wagon par un vecteur, il sera tout à fait équivalent, du point de vue du mouvement, de considérer que le point d'application de cette force peut se placer à l'arrière comme à l'avant du chariot. Le vecteur représentant la force sera donc un vecteur pouvant « glisser » sur sa droite de support.

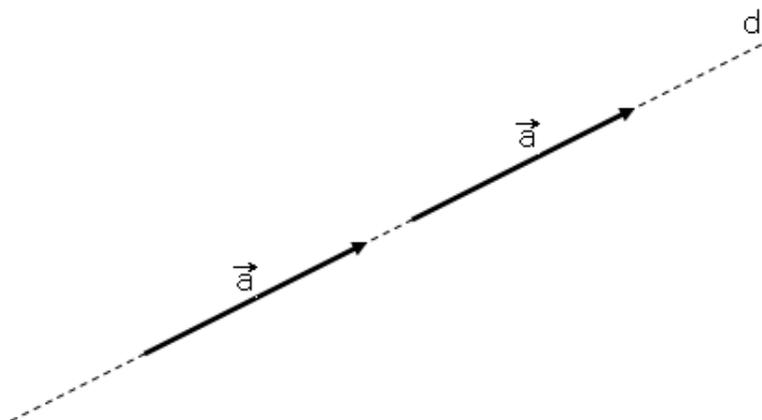


FIG. 7.4 – Vecteur glissant \vec{a}

En bref, - **(définition)** - un vecteur glissant \vec{AB} est un vecteur dont l'origine A peut se déplacer sur sa droite de support d (voir schéma 7.4).

7.2 Opérations sur les vecteurs

Dans cette section, nous ne considérerons que des vecteurs libres.

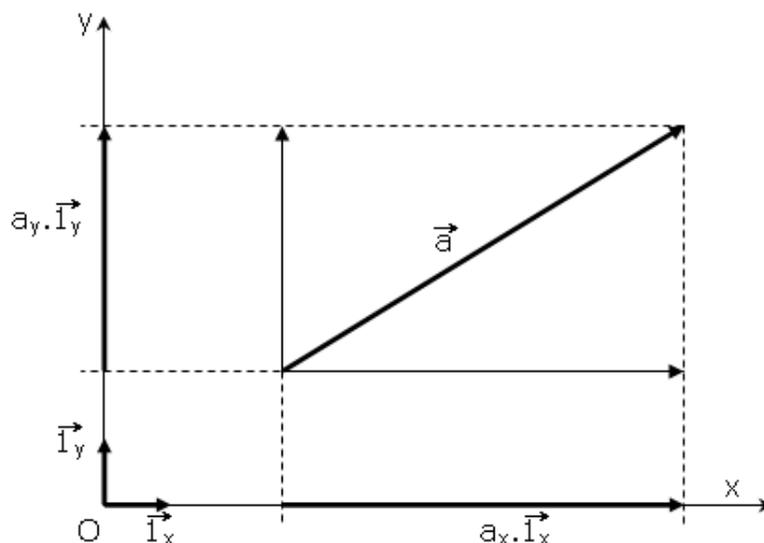


FIG. 7.5 – Composants (x, y) d'un vecteur \vec{a}

Dans un repère cartésien à 2 dimensions, on peut aussi représenter \vec{a} par un couple de réels (a_x, a_y) . Ou encore, en le projetant orthogonalement sur l'axe x et sur l'axe y , on obtient $a_x \vec{i}_x + a_y \vec{i}_y$. Avec cette notation, on comprend aisément que le vecteur \vec{a} « avance » de a_x dans la direction x (il « recule » si a_x est négatif) et « monte » de a_y dans la direction y (il « descend » si a_y est négatif) (voir schéma 7.5).

A 3 dimensions, le cas se généralise si on représente \vec{a} par un triplet (a_x, a_y, a_z) , ou encore, avec la notation vectorielle $a_x \vec{i}_x + a_y \vec{i}_y + a_z \vec{i}_z$

7.2.1 Addition de 2 vecteurs

Soit 2 vecteurs libres \vec{a} et \vec{b} placés dans un repère cartésien Oxy . Leurs composantes sont définies par les couples (a_x, a_y) et (b_x, b_y) . On peut comprendre aisément que si l'on additionne \vec{a} et \vec{b} , le vecteur $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ « avance » de a_x , puis de b_x dans la direction x et « monte » de a_y , puis de b_y dans la direction y .

Le vecteur $\vec{a} + \vec{b}$ se construit de la manière suivante :

On amène l'origine du deuxième vecteur à l'extrémité du premier, la somme est le vecteur qui joint l'origine du premier vecteur à l'extrémité de second.

Il s'agit du troisième côté d'un triangle formé par les deux premiers vecteurs.

On peut aussi le construire d'une autre manière :

On amène les origines des deux vecteurs en un même point, on trace un parallélogramme dont les vecteurs sont deux côtés, la somme est alors la diagonale du parallélogramme partant de l'origine.

Dans les deux cas, on place les vecteurs bout-à-bout ; mais si l'origine d'un vecteur correspond à l'extrémité de l'autre, on utilise la méthode du triangle, si les origines sont confondues, on utilise la méthode du parallélogramme (voir schéma 7.6).

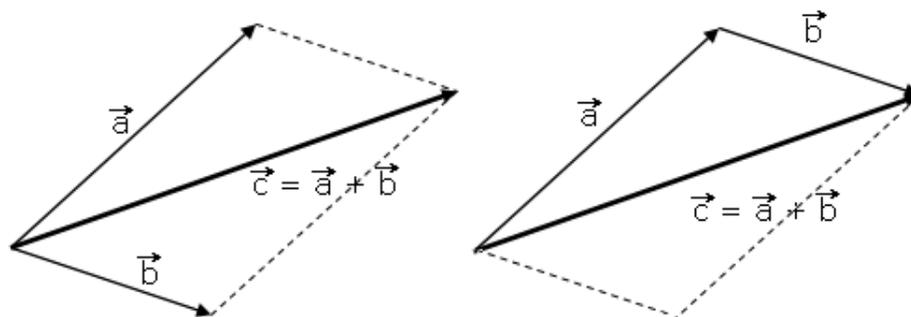


FIG. 7.6 – Addition de 2 vecteurs : méthode du parallélogramme (à gauche) et du triangle (à droite)

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
 \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} \\
 &= (a_x \vec{1}_x + a_y \vec{1}_y) + (b_x \vec{1}_x + b_y \vec{1}_y) \\
 &= (a_x \vec{1}_x + b_x \vec{1}_x) + (a_y \vec{1}_y + b_y \vec{1}_y) \\
 &= (a_x + b_x) \vec{1}_x + (a_y + b_y) \vec{1}_y
 \end{aligned}$$

Ou encore, avec la notation $\vec{c} \equiv (c_x, c_y)$

$$\begin{aligned}
 \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} \\
 (c_x, c_y) &= (a_x, a_y) + (b_x, b_y) \\
 &= (a_x + b_x, a_y + b_y)
 \end{aligned}$$

Nous pouvons dès lors tirer plusieurs propriétés relatives à l'addition de vecteurs.

1. **Propriété** : la somme de deux vecteurs est un vecteur.

En effet, $\vec{a} + \vec{b}$ est un vecteur.

2. **Propriété** : la somme de vecteurs est commutative.

En effet, $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y) = (b_x + a_x, b_y + a_y) = \vec{b} + \vec{a}$.

3. **Propriété** : la somme de vecteurs est associative.

En effet,

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (a_x, a_y) + (b_x + c_x, b_y + c_y) = (a_x + b_x + c_x, a_y + b_y + c_y) = (a_x + b_x, a_y + b_y) + (c_x, c_y) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

4. **Propriété** : l'ensemble des vecteurs muni de la loi d'addition possède un neutre $\vec{0}$.

Le vecteur nul est le vecteur dont les représentants sont de type (A, A) (les deux points sont confondus). Il est noté $\vec{0} \equiv (0, 0)$. Il est de longueur nulle et sa direction n'est pas définie.

$$\text{On a, } \vec{a} + \vec{0} = (a_x + 0, a_y + 0) = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

5. **Propriété** : tout vecteur \vec{a} de l'ensemble des vecteurs muni de la loi d'addition possède un symétrique $-\vec{a}$ (voir schéma 7.7).

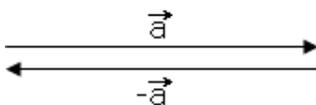


FIG. 7.7 – Représentation du vecteur \vec{a} et de son opposé $-\vec{a}$.

$$\text{On a, } \vec{a} + \vec{a}^l = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}^l = -\vec{a}.$$

Les propriétés ci-dessus peuvent se résumer par la compréhension du polygone de Varignon qui exprime que $\vec{v}_R = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \dots + \vec{v}_n$ (voir schéma 7.8).

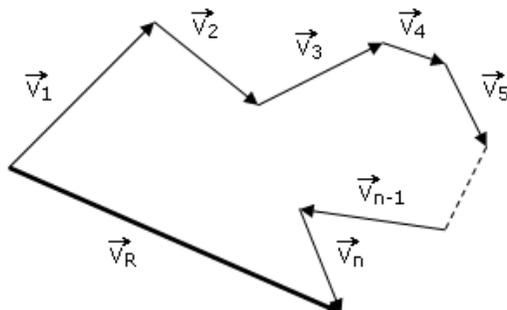


FIG. 7.8 – Polygone de Varignon : $\vec{v}_R = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \dots + \vec{v}_n$

Dans le cas particulier où l'on a trois points A , B et C , alors on a la « **relation de Chasles** » (voir schéma 7.9) :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

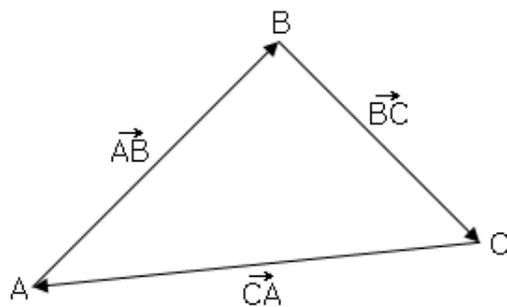


FIG. 7.9 – Relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$

On déduit de cela que

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

L'opposé d'un vecteur est le vecteur de même direction, de même longueur, mais de sens opposé. Ce qui permet de définir la soustraction : en posant la notation

$$-\vec{AB} = \vec{BA}$$

7.2.2 Soustraction de 2 vecteurs

Soit 2 vecteurs libres \vec{a} et \vec{b} placés dans un repère cartésien Oxy . Leurs composantes sont définies par les couples (a_x, a_y) et (b_x, b_y) . On peut comprendre aisément que si l'on soustrait \vec{b} de \vec{a} , le vecteur $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ « avance » de a_x , puis « recule » de b_x dans la direction x et « monte » de a_y , puis « descend » de b_y dans la direction y . Autrement dit, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ « avance » de a_x et $-b_x$ dans la direction x et « monte » de a_y et de $-b_y$ dans la direction y (voir schéma 7.10).

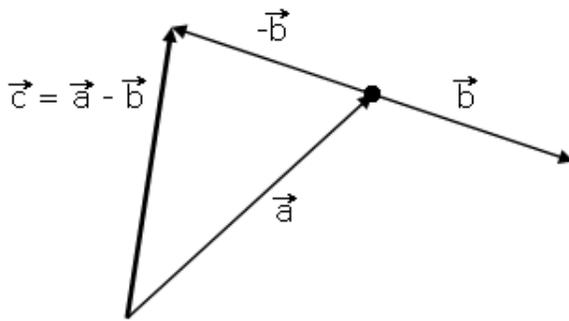


FIG. 7.10 – Soustraction de 2 vecteurs

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} - \vec{b} \\ &= (a_x \vec{1}_x + a_y \vec{1}_y) - (b_x \vec{1}_x + b_y \vec{1}_y) \\ &= (a_x \vec{1}_x - b_x \vec{1}_x) + (a_y \vec{1}_y - b_y \vec{1}_y) \\ &= (a_x - b_x) \vec{1}_x + (a_y - b_y) \vec{1}_y\end{aligned}$$

Ou encore, avec la notation $\vec{c} \equiv (c_x, c_y)$

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} - \vec{b} \\ (c_x, c_y) &= (a_x, a_y) - (b_x, b_y) \\ &= (a_x - b_x, a_y - b_y)\end{aligned}$$

Nous pouvons dès lors tirer plusieurs propriétés relatives à la soustraction de 2 vecteurs.

1. **Propriété** : la soustraction de 2 vecteurs est un vecteur.

En effet, $\vec{a} - \vec{b}$ est un vecteur.

2. **Propriété** : la soustraction de 2 vecteurs est anticommutative.

En effet, $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y) = (-b_x + a_x, -b_y + a_y) = -\vec{b} + \vec{a} = -(\vec{b} - \vec{a})$.

On peut donc conclure que soustraire \vec{b} de \vec{a} , c'est additionner \vec{a} avec le symétrique \vec{b}' de \vec{b} (voir schéma 7.10). En écrivant $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}' = \vec{a} + (-\vec{b})$, on peut donc facilement appliquer les autres propriétés de l'addition à la soustraction de deux vecteurs.

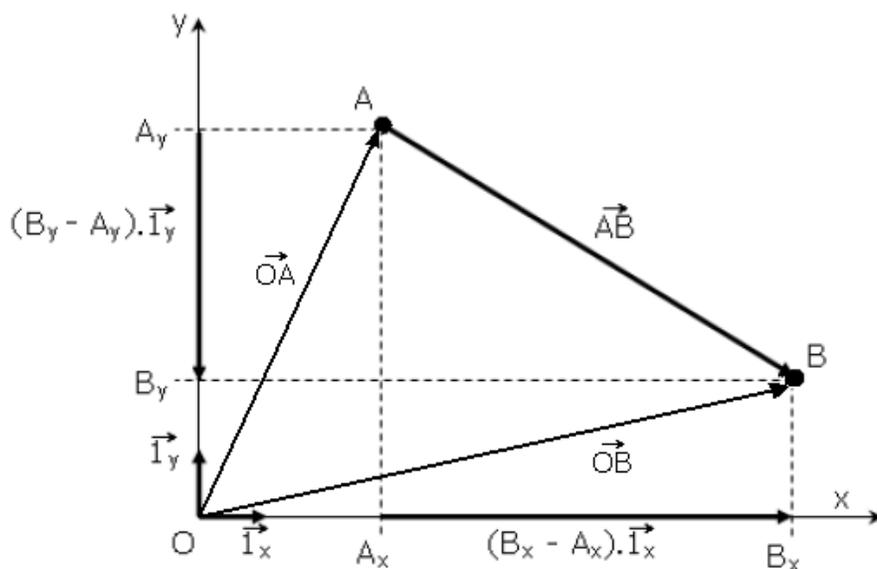
Dans le cas d'un vecteur \vec{AB} défini par un couple de points (A, B) , on peut toujours décomposer \vec{AB} en une somme de 2 vecteurs \vec{AO} et \vec{OB} . Nous avons donc

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{AO} + \vec{OB} \\ &= \vec{OB} + \vec{AO} \\ &= \vec{OB} - \vec{OA}\end{aligned}$$

En utilisant la décomposition vectorielle, il vient (voir schéma 7.11)

$$\begin{aligned}\vec{OB} - \vec{OA} &= (B_x \vec{1}_x + B_y \vec{1}_y) - (A_x \vec{1}_x + A_y \vec{1}_y) \\ &= B_x \vec{1}_x - A_x \vec{1}_x + B_y \vec{1}_y - A_y \vec{1}_y \\ &= (B_x - A_x) \vec{1}_x + (B_y - A_y) \vec{1}_y\end{aligned}$$

Avec cette notation, on comprend aisément que le vecteur \vec{AB} « avance » de $(B_x - A_x)$ dans la direction x (il « recule » si $(B_x - A_x)$ est négatif) et « monte » de $(B_y - A_y)$ dans la direction y (il « descend » si $(B_y - A_y)$ est négatif) et ce, s'il s'agit d'un vecteur lié, indépendamment de son origine A .

FIG. 7.11 – Composantes (x, y) d'un vecteur \vec{AB}

7.2.3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

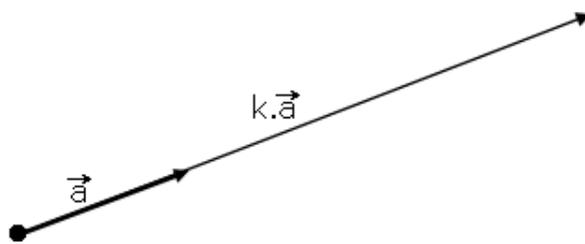
Rappelons que le terme « scalaire » désigne un nombre réel. Le produit d'un vecteur \vec{a} par un scalaire k (voir schéma 7.12) est un vecteur noté

$$k\vec{a}$$

- de même direction et sens que \vec{a} , si $k > 0$
- de même direction mais de sens contraire que \vec{a} , si $k < 0$.
- Il s'agit d'un vecteur nul si $k = 0$.

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= k\vec{a} \\ &= k(a_x \vec{I}_x + a_y \vec{I}_y) \\ &= k a_x \vec{I}_x + k a_y \vec{I}_y \end{aligned}$$

FIG. 7.12 – Multiplication d'un vecteur \vec{a} par un scalaire k (avec $k > 1$).

Ou encore, avec la notation $\vec{a}' \equiv (a'_x, a'_y)$

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= k\vec{a} \\ (a'_x, a'_y) &= k(a_x, a_y) \\ &= (k a_x, k a_y)\end{aligned}$$

Nous pouvons dès lors tirer plusieurs propriétés relatives à la multiplication d'un scalaire et d'un vecteur.

1. **Propriété** : la multiplication d'un vecteur par un scalaire est un vecteur.

En effet, $k\vec{a}$ est un vecteur.

2. **Propriété** : la multiplication d'un vecteur par un scalaire distribue l'addition de scalaires.

En effet, $(k_1+k_2)\vec{a} = (k_1+k_2)(a_x, a_y) = ((k_1+k_2)a_x, (k_1+k_2)a_y) = (k_1 a_x, k_1 a_y) + (k_2 a_x, k_2 a_y) = k_1(a_x, a_y) + k_2(a_x, a_y) = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$.

3. **Propriété** : la multiplication d'un vecteur par un scalaire distribue l'addition de vecteurs (voir schéma 7.13).

En effet, $k(\vec{a} + \vec{b}) = k((a_x, a_y) + (b_x, b_y)) = k(a_x, a_y) + k(b_x, b_y) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

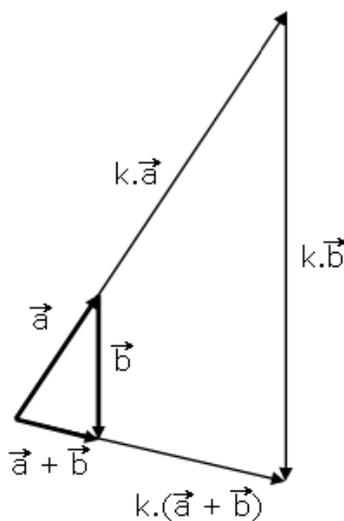


FIG. 7.13 – Multiplication de l'addition de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} par un scalaire k

4. **Propriété** : la multiplication d'un vecteur par un scalaire distribue la multiplication de scalaires.

$$\text{En effet, } (k_1 k_2) \vec{a} = (k_1 k_2)(a_x, a_y) = (k_1 k_2 a_x, k_1 k_2 a_y) = k_1(k_2 \vec{a}) = k_2(k_1 \vec{a}) = k_2 k_1 \vec{a}.$$

5. **Propriété** : l'ensemble des vecteurs muni de la loi de multiplication par un scalaire possède un neutre 1.

$$\text{En effet, } 1 \vec{a} = \vec{a}$$

6. **Propriété** : l'ensemble des vecteurs muni de la loi de multiplication par un scalaire possède un élément absorbant 0.

$$\text{En effet, } 0 \vec{a} = \vec{0}$$

Nous pouvons donc conclure que la multiplication d'un vecteur \vec{a} par un scalaire k agit, sur \vec{a} , comme une dilatation (si $|k| > 1$) ou une contraction (si $|k| < 1$), bref d'une homothétie de rapport k . La direction est conservée, mais le sens dépend du signe de k (voir schéma 7.14).

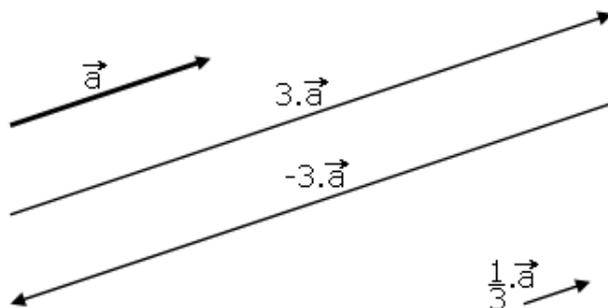


FIG. 7.14 – Multiplication d'un vecteur \vec{a} par un scalaire $k = 3, -3$ et $\frac{1}{3}$

7.2.4 Norme d'un vecteur

Lorsqu'on parle de « magnitude » d'un vecteur, il convient d'être un peu plus clair et un peu plus rigoureux. Nous allons pour ça définir une notion mathématique supplémentaire : la norme.

La norme d'un vecteur, notée $\|\vec{a}\|$ (ou plus simplement a), correspond à sa « longueur ». La norme d'un vecteur représentant une force sera donc donnée par l'intensité de cette force, 250 Newtons par exemple.

Pour calculer la norme d'un vecteur dans des coordonnées cartésiennes, nous allons appliquer le théorème de pythagore.

En effet, si nous avons $\vec{AB} = (B_x - A_x)\vec{1}_x + (B_y - A_y)\vec{1}_y$, alors, étant donné que les axes x et y sont perpendiculaires, on peut former le triangle rectangle ABB' , où B' est la projection orthogonale du point B sur la droite $d \equiv y = A_y$.

Comme $A_y = B'_y$ et $B_x = B'_x$, on a

$$\begin{aligned} \|\vec{AB}\|^2 &= |AB|^2 \\ &= |AB'|^2 + |B'B|^2 \\ &= (B'_x - A_x)^2 + (B_y - B'_y)^2 \\ &= (B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 \end{aligned}$$

Donc, - **définition** - la norme d'un vecteur vaut

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}$$

et, par conséquent (voir schéma 7.15), si $\vec{a} \equiv (a_x, a_y)$,

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

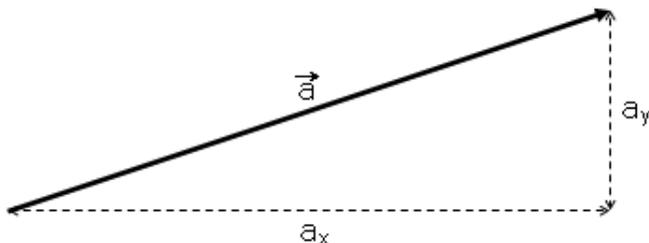


FIG. 7.15 – Norme d'un vecteur \vec{a} , mise en évidence du triangle rectangle dans les coordonnées (x, y) (les axes Ox et Oy ne sont pas représentés sur le schéma)

Un **vecteur unitaire** est un vecteur dont la norme vaut 1.

Par exemple, le vecteur $\vec{1}_r \equiv (\cos \theta, \sin \theta)$ est un vecteur unitaire car

$$\|\vec{1}_r\|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{1}_r\| = 1$$

On peut toujours transformer un vecteur quelconque \vec{a} en un vecteur unitaire $\vec{1}_a$ de même direction que \vec{a} . On applique simplement

$$\vec{1}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

En effet,

$$\|\vec{1}_a\| = \frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} = 1$$

Remarquons que **la norme d'un vecteur est toujours positive**. En effet, $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \geq 0$.

En 3 dimensions, la norme se généralise en considérant simplement

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

7.2.5 Produit scalaire de 2 vecteurs

Dans le calcul vectoriel, le produit scalaire est une opération algébrique effectuée entre deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} (voir schéma 7.16). À ces deux vecteurs elle associe leur produit scalaire

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

qui est un nombre (ou scalaire). Elle permet de retrouver les notions de la géométrie euclidienne traditionnelle : longueurs, angles, orthogonalité en dimension deux et trois, mais aussi de les étendre à des espaces vectoriels réels de toute dimension, et parfois aux espaces vectoriels complexes.

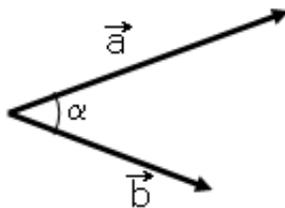


FIG. 7.16 – Deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} formant un angle α

C'est ainsi, par exemple, qu'une fois qu'on aura muni un espace de polynômes d'un produit scalaire, on pourra parler de distance ou d'angle entre deux polynômes. Par exemple, le produit scalaire de deux polynômes $p(x)$ et $q(x)$ peut être donné par l'opération $\langle p|q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx$.

Pour les curieux, d'une façon parfaitement rigoureuse, en empruntant une notation de la mécanique quantique $\langle \cdot | \cdot \rangle$, on définit le produit scalaire comme suit :
On dit qu'une application ϕ telle que

$$\phi : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow \langle x|y \rangle$$

est un produit scalaire si elle est :

- symétrique : $\forall x, y \in \mathbf{E} : \langle y|x \rangle = \langle x|y \rangle$
- positive : $\forall x \in \mathbf{E} : \langle x|x \rangle \geq 0$
- définie : $\langle x|x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
- (bi)linéaire : $\langle k_x x + k_{x'} x' | y \rangle = k_x \langle x|y \rangle + k_{x'} \langle x'|y \rangle$.

Élément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions. La notation du produit scalaire à l'aide d'un point ou d'une croix provient de Josiah Willard Gibbs, dans les années 1880.

Le produit scalaire se révèle très utile, aussi bien en physique pour le calcul du travail d'une force qu'en géométrie élémentaire pour démontrer des propriétés sur les angles et les distances ou en algèbre linéaire pour munir un espace vectoriel d'une distance.

Trois définitions lui correspondent :

Définition 1 : Soit $\vec{a} \equiv (a_x, a_y)$ et $\vec{b} \equiv (b_x, b_y)$. On a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Définition 2 : Soit α l'angle formé par les vecteurs \vec{a} et \vec{b} . On a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \alpha$$

Définition 3 : Soit \vec{b}' , le projeté orthogonal de \vec{b} sur \vec{a} (voir schéma 7.17). On a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}'\|$$

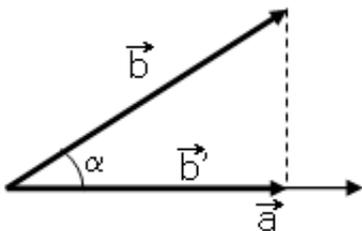


FIG. 7.17 – Projection \vec{b}' de \vec{b} sur \vec{a} . Les vecteurs \vec{b} et $\vec{b}' \parallel \vec{a}$ forment un angle α

Nous pouvons dès lors fournir certaines propriétés inhérentes au produit scalaire.

1. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.

En effet, $\vec{a} \cdot \vec{b} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ par définition.

2. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs identiques est positif.

En effet, $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x a_x + a_y a_y = a_x^2 + a_y^2 \geq 0$.

3. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs nuls $\vec{0}$ est nul.

En effet, $\vec{0} \cdot \vec{0} = 0.0 + 0.0 = 0$.

4. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs est commutatif.

En effet, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = b_x a_x + b_y a_y = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

5. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs distribue l'addition de vecteurs.

$$\text{En effet, } \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_x(b_x + c_x) + a_y(b_y + c_y) = a_x b_x + a_y b_y + a_x c_x + a_y c_y = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

6. **Propriété** : l'espace des vecteurs muni du produit scalaire possède un élément absorbant $\vec{0}$.

$$\text{En effet, } \vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} = a_x 0 + a_y 0 = 0.$$

7. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas associatif.

$$\text{En effet, } \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = k\vec{a} \parallel \vec{a} \text{ et } (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = k'\vec{c} \parallel \vec{c}. \text{ Donc, } \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Produit scalaire de vecteurs perpendiculaires :

Si l'on considère la définition 2, on a, pour \vec{a} et \vec{b} perpendiculaires,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot 0 = 0$$

si les vecteurs sont perpendiculaires, $\vec{a} \perp \vec{b}$, alors l'angle entre eux est un angle droit et le produit scalaire donne zéro (voir schéma 7.18).

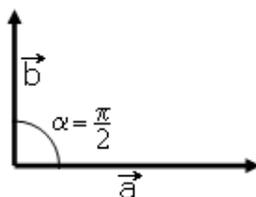


FIG. 7.18 – Deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} formant un angle droit $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Produit scalaire de vecteurs parallèles :

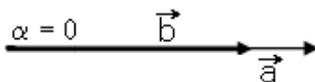


FIG. 7.19 – Deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} formant un angle α nul

Si l'on considère la définition 2, on a, pour \vec{a} et \vec{b} parallèles et de même sens (voir schéma 7.19),

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot 1 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

et pour \vec{a} et \vec{b} parallèles et de sens opposés,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \pi = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot (-1) = -\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

Remarques concernant les définitions du produit scalaire :

1. Comme le produit scalaire est commutatif, on peut, sur base de la définition 3, créer une nouvelle définition du produit scalaire.

Définition 3 bis : Soit \vec{a}' , le projeté orthogonal de \vec{a} sur \vec{b} . On a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}'\| \cdot \|\vec{b}\|$$

2. Les définitions 1 et 2 peuvent nous permettre de calculer l'angle α entre n'importe quel couple de vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont connus. En effet, les définitions étant équivalentes, on a

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)}} \end{aligned}$$

3. Les définitions 3 et 3 bis nous amènent à reconsidérer la notion de projection orthogonale. En effet, soit le vecteur directeur $\vec{1}_d$ d'une droite d . Supposons que ce vecteur est unitaire. La norme de la projection orthogonale \vec{a}' d'un vecteur \vec{a} sur la droite d sera donnée par le produit scalaire

$$\|\vec{a}'\| = \vec{a} \cdot \vec{1}_d = \|\vec{a}\| \cdot \cos \alpha$$

où α est l'angle formé par le vecteur \vec{a} et la droite d (voir schéma 7.20).

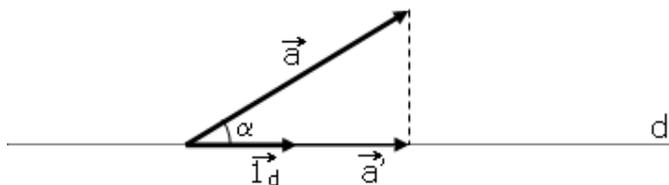


FIG. 7.20 – Projection d'un vecteur \vec{a} sur une droite d . Le vecteur \vec{a} et la droite d forment un angle α

4. Les définitions 3 et 3 bis nous amènent à reconsidérer la notion d'abscisse et d'ordonnée. En effet, soit un vecteur \vec{a} placé dans un plan muni d'un repère cartésien Oxy . On peut écrire que $\vec{a} = a_x \vec{1}_x + a_y \vec{1}_y$ (voir schéma 7.21). Donc, les normes des projections orthogonales de \vec{a} sur les axes x et y , c'est-à-dire $a_x \vec{1}_x$ et $a_y \vec{1}_y$, sont données respectivement par

$$\begin{aligned} \|a_x \vec{1}_x\| &= (a_x \vec{1}_x + a_y \vec{1}_y) \cdot \vec{1}_x \\ &= a_x (\vec{1}_x \cdot \vec{1}_x) + a_y (\vec{1}_y \cdot \vec{1}_x) \\ &= a_x \vec{1}_x^2 + a_y \vec{1}_x \cdot \vec{1}_y \\ &= a_x \|\vec{1}_x\|^2 \\ &= a_x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \|a_y \vec{1}_y\| &= (a_x \vec{1}_x + a_y \vec{1}_y) \cdot \vec{1}_y \\
 &= a_x (\vec{1}_x \cdot \vec{1}_y) + a_y (\vec{1}_y \cdot \vec{1}_y) \\
 &= a_x \vec{1}_x \cdot \vec{1}_y + a_y \vec{1}_y^2 \\
 &= a_y \|\vec{1}_y\|^2 \\
 &= a_y
 \end{aligned}$$

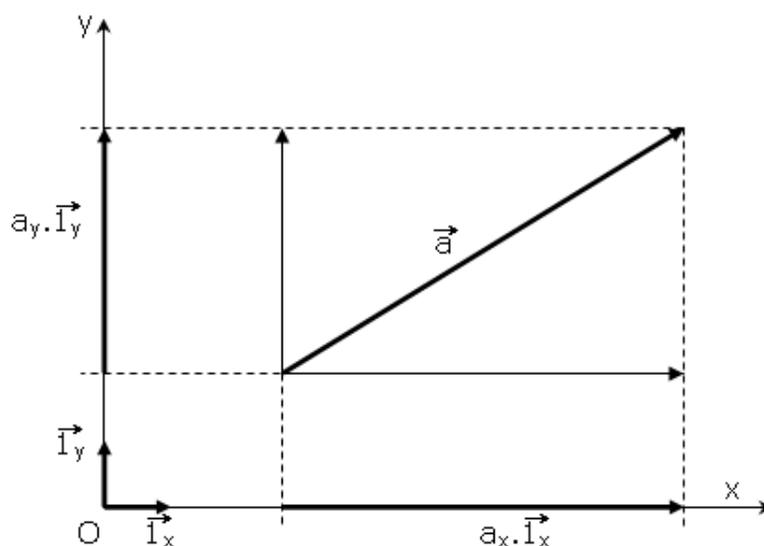


FIG. 7.21 – Projection d'un vecteur \vec{a} sur l'axe Ox et Oy . Le vecteur \vec{a} peut donc s'écrire comme l'addition de deux vecteurs $a_x \vec{1}_x + a_y \vec{1}_y$ où $a_x = \vec{a} \cdot \vec{1}_x$ et $a_y = \vec{a} \cdot \vec{1}_y$.

5. La définition 1 et la définition 2 nous conduisent à réanalyser la notion mathématique de « norme » pour la faire découler de la notion de produit scalaire². En effet,

$$\|\vec{a}\|^2 = a_x^2 + a_y^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

et

$$\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos 0 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

Donc,

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

²Remarquons que de manière générale, le produit scalaire étant défini par $\langle x|y \rangle$, la norme d'un élément x d'un espace vectoriel sera noté $\sqrt{\langle x|x \rangle}$. Par exemple, l'espace des polynômes muni du produit scalaire $\langle p|q \rangle = \int_a^b p(x) q(x) dx$ nous donnera une norme $\|p\| = \sqrt{\langle p|p \rangle} = \sqrt{\int_a^b p^2(x) dx}$

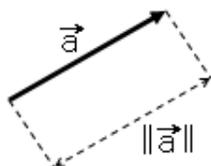


FIG. 7.22 – norme d'un vecteur \vec{a} . La norme est déduite de $\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 = \|\vec{a}\|^2$.

6. Nous pouvons finalement étendre toutes les propriétés du produit scalaire à un espace à 3 dimensions, en réajustant la définition 1 selon

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Nous pouvons dès lors constater que le produit scalaire constitue un excellent outil en géométrie analytique pour déterminer l'amplitude d'un angle. En particulier s'il s'agit d'un angle droit car,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Produit scalaire : règle du parallélogramme

L'addition de deux vecteurs peut se faire, nous l'avons vu précédemment, grâce à la « règle du parallélogramme ». Nous disposons maintenant de puissants outils pour calculer la norme et la direction du vecteur $\vec{a} + \vec{b}$, connaissant $\vec{a} \equiv (a_x, a_y)$ et $\vec{b} \equiv (b_x, b_y)$ (voir schéma 7.23).

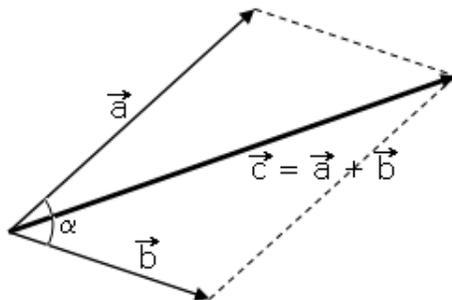


FIG. 7.23 – norme d'un vecteur $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. La norme est déduite de $\|\vec{c}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$.

On a $\vec{a} + \vec{b} \equiv (a_x + b_x, a_y + b_y)$. Donc,

$$\begin{aligned} \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a}^2 + 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha \end{aligned}$$

7.2.6 Produit vectoriel de 2 vecteurs

Le produit vectoriel est le résultat d'une multiplication vectorielle dans l'espace euclidien orienté de dimension trois. Cette notion a été théorisée dans les années 1880 par Josiah Willard Gibbs à partir des travaux de Hermann Günther Grassmann.

Définition 1 : Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} se définit comme l'unique vecteur $\vec{a} \times \vec{b}$ tel que (voir schéma 7.24) :

- le vecteur $\vec{a} \times \vec{b}$ est orthogonal aux deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} ,
- le repère $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ est de sens direct (règle de la main droite : \vec{a} se rabattant sur \vec{b} nous fournit l'orientation du vecteur $\vec{a} \times \vec{b}$),
- la norme $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \alpha$.

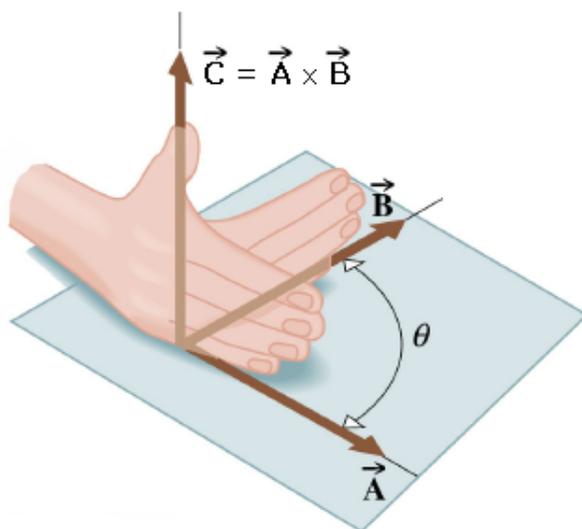


FIG. 7.24 – Produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$ des vecteurs \vec{A} et \vec{B} .

Plusieurs notations sont en concurrence pour le produit vectoriel. On utilise spécialement en France le V renversé (\wedge) initié par Cesare Burali-Forti, mais qui a le gros défaut d'être en conflit avec la notation du produit extérieur et du « et » logique. La notation par une croix (\times), due à Josiah Willard Gibbs, a le défaut d'être en conflit avec le produit des réels ou le produit cartésien.

Voici quelques exemples de notation :

- $\vec{a} \wedge \vec{b}$ en France et dans les pays francophones en général.
- $\vec{a} \times \vec{b}$ dans les pays anglophones et hispanophones, Charleroi, Allemagne, Chine, Japon, Canada (y compris francophone), Corée, Vietnam, etc.
- $[\vec{a}, \vec{b}]$ dans les pays de l'Est.

Définition 2 Dans une base orthonormée directe $(\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z)$, le produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ se définit comme :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{1}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{1}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{1}_z$$

Nous pouvons dès lors fournir certaines propriétés inhérentes au produit vectoriel.

1. **Propriété** : le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur.

En effet, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ avec \vec{c} qui est un vecteur par définition.

2. **Propriété** : le produit vectoriel de deux vecteurs est anticommutatif (voir schéma 7.25).

En effet,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

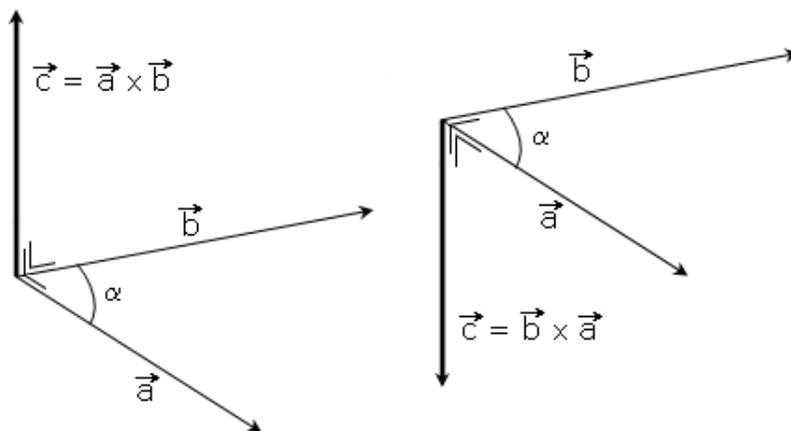


FIG. 7.25 – Produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ et $\vec{b} \times \vec{a}$ des vecteurs \vec{a} et \vec{b} .

3. **Propriété** : le produit vectoriel de deux vecteurs distribue l'addition de vecteurs.

En effet,

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x + c_x & b_y + c_y & b_z + c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Donc,

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

4. **Propriété** : le produit vectoriel est compatible avec la multiplication par un scalaire.

En effet,

$$k(\vec{a} \times \vec{b}) = k \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ ka_x & ka_y & ka_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ kb_x & kb_y & kb_z \end{vmatrix}$$

Donc,

$$k(\vec{a} \times \vec{b}) = k\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times k\vec{b}$$

5. **Propriété** : l'espace des vecteurs muni du produit vectoriel possède un élément absorbant $\vec{0}$.

$$\text{En effet, } \vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

6. **Propriété** : le produit vectoriel n'est pas associatif.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix} \\ &= (a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z))\vec{1}_x + \dots \\ &= (a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z)\vec{1}_x + \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_y b_z - a_z b_y & a_z b_x - a_x b_z & a_x b_y - a_y b_x \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \\ &= ((a_z b_x - a_x b_z)c_z - (a_x b_y - a_y b_x)c_y)\vec{1}_x + \dots \\ &= (a_z b_x c_z - a_x b_z c_z - a_x b_y c_y + a_y b_x c_y)\vec{1}_x + \dots \\ &= (a_y b_x c_y - a_x b_y c_y - a_x b_z c_z + a_z b_x c_z)\vec{1}_x + \dots \end{aligned}$$

Donc, les composantes selon x diffèrent pour $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ et $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, ce qui nous suffit pour dire que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

Produit vectoriel de vecteurs perpendiculaires :

Si l'on considère la définition 1, on a, pour \vec{a} et \vec{b} perpendiculaires (voir schéma 7.26),

$$\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot 1 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

et

$$\vec{b} \times \vec{a} = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot (-1) = -\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

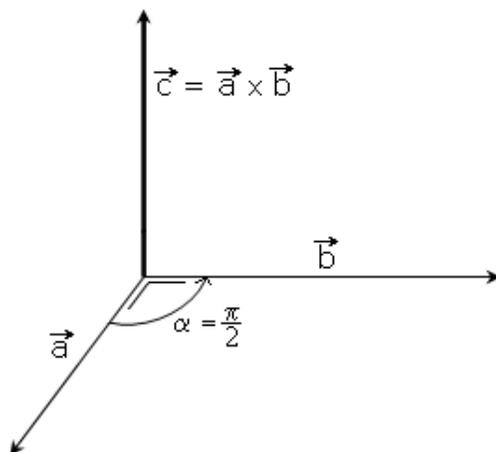


FIG. 7.26 – Produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ des vecteurs \vec{a} et \vec{b} perpendiculaires.

Produit vectoriel de vecteurs parallèles :

Si l'on considère la définition 1, on a, pour \vec{a} et \vec{b} parallèles et de même sens,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin 0 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot 0 = 0$$

et pour \vec{a} et \vec{b} parallèles et de sens opposés,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \pi = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot 0 = 0$$

si les vecteurs sont parallèles, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, alors l'angle entre eux est nul et le produit vectoriel donne le vecteur nul (voir schéma 7.27).

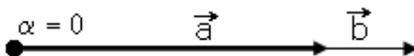


FIG. 7.27 – Produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ des vecteurs \vec{a} et \vec{b} parallèles.

Remarque concernant les définitions du produit vectoriel :

D'après la définition 1 et 2 du produit vectoriel, le sinus de l'angle α formé par deux vecteurs vaut :

$$\sin \alpha = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \sqrt{\frac{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

Nous pouvons dès lors constater que le produit vectoriel constitue un outil relativement puissant en géométrie analytique dans l'espace pour déterminer l'amplitude d'un angle. En particulier s'il s'agit d'un angle plat ou nul car,

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Produit vectoriel : produit mixte, calcul du volume d'un parallélépipède

Si les vecteurs \vec{a} et \vec{b} ont même origine, la norme $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur \vec{a} et \vec{b} , car l'aire du parallélogramme est le produit de sa hauteur par un des côtés, et sa hauteur est égale au produit de l'autre côté par le sinus de l'angle.

Soit un parallélépipède quelconque, de hauteur c et dont la longueur des côtés de la base vaut respectivement a et b . Le produit mixte

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

s'interprète comme le volume de ce parallélépipède (voir schéma 7.28).

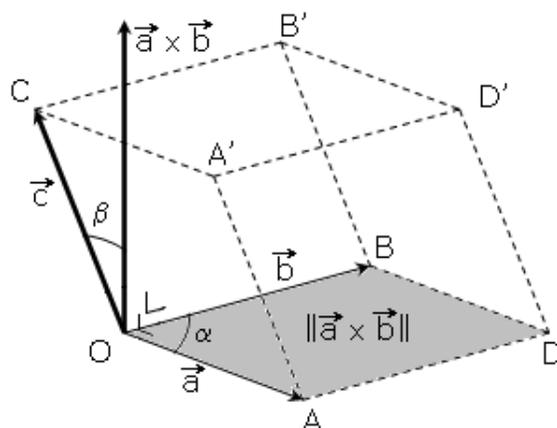


FIG. 7.28 – Produit mixte $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ des vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} . L'aire coloriée est donnée par la norme $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ du produit vectoriel de \vec{a} et \vec{b} .

7.2.7 Identités de Lagrange

On peut démontrer que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

et

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

ainsi que

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$$

Nous pouvons mettre la dernière identité sous la forme

$$\left(\frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right)^2 + \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right)^2 = 1$$

ce qui équivaut à l'identité trigonométrique :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

et qui, si α représente l'angle compris entre les vecteurs \vec{a} et \vec{b} , n'est rien d'autre qu'une des façons d'écrire le théorème de Pythagore.

La dernière identité de Lagrange peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)$$

Ce qui signifie que le produit de somme de trois carrés est encore une somme de deux carrés.

Historiquement, cette dernière identité fut définie pour 4 réels a, b, c et d . On a

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Cette égalité est encore utilisée dans les problèmes d'arithmétique qui font intervenir des décompositions en sommes de carrés. Elle signifie que le produit de somme de deux carrés est encore une somme de deux carrés.

Joseph-Louis Lagrange (25 janvier 1736, Turin - 10 avril 1813, Paris)

Giuseppe Lodovico Lagrangia est né le 25 janvier 1736 à Turin, alors capitale du royaume de Sardaigne. Il est pourtant considéré comme un mathématicien français et non italien, ceci de sa propre volonté (la branche paternelle de sa famille étant française). Son père dispose d'une position sociale favorable auprès du roi de Sardaigne, mais il a perdu beaucoup d'argent dans une spéculation hasardeuse. Lagrange étudia brillamment à l'université de sa ville natale. Son intérêt pour les mathématiques ne se manifeste que vers 17 ans, à la lecture d'un mémoire de Halley sur l'utilisation de l'algèbre en optique. Il se plonge alors aussitôt, seul et sans aide, dans l'étude des mathématiques.

A la fin de l'année 1755, Lagrange devient professeur à l'école d'artillerie de Turin., ville où il fonde en 1757 une académie des sciences. Son talent est très vite reconnu, et il écrit durant ses premières années de brillants mémoires où il applique les méthodes du calcul des variations à la mécanique (propagation du son, cordes vibrantes). En 1764 notamment, Lagrange gagne le Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris, pour son travail sur les petites perturbations de son orbite, et sur le fait que la lune présente toujours la même face à la terre. Lagrange deviendra un véritable habitué de ce prix, le gagnant à nouveau en 1772, 1774 et 1780.

En 1766, grâce à l'appui de D'Alembert, Lagrange succède à Euler au poste prestigieux de directeur des mathématiques à l'Académie des Sciences de Berlin. Il passera 20 ans là-bas, d'une extraordinaire fertilité. Hormi quelques arrêts dus à une santé fragile, il publie avec une régularité impressionnante des mémoires qui touchent tous les domaines des mathématiques et de la mécanique : astronomie, probabilités, théorie des équations algébriques (son travail sur les racines ouvre la voie à Abel et Galois), équations différentielles, théorie des fonctions. Dans une perspective plus historique, Lagrange est à la transition entre l'époque d'Euler, où l'on publie à tout va sans trop se soucier de la rigueur, et le XIX^e s., où sous

l'impulsion de Gauss, Cauchy et Weierstrass, la rigueur devient au centre des mathématiques.

Lagrange souffre parfois de dépression, et s'il se marie en 1767 avec une de ses cousines (il est veuf en 1783), il n'a pas d'enfants, et on dit que ce mariage est peu heureux. Les dernières années à Berlin sont consacrées à l'étude du monumental *Traité de Mécanique Analytique*, où il reprend, complète et unifie les connaissances accumulées depuis Newton. Ce livre, qui devient pour tous ses contemporains une référence, se veut notamment une apologie de l'utilisation des équations différentielles en mécanique.

En 1787, après la mort de l'Empereur Frédéric II, Lagrange part pour la France où il devient membre de l'Académie des Sciences de Paris. Il est un des rares à traverser la Révolution sans être inquiété. Il est même Président de la Commission des poids et des mesures, et est à ce titre un des pères du système métrique et de l'adoption de la division décimale des mesures. Les événements le marquent cependant beaucoup, en particulier le guillotinage du chimiste Lavoisier, au sujet duquel il déclare : « Il a fallu un instant pour couper sa tête, et un siècle ne suffira pas pour en produire une si bien faite ».

Lagrange participe encore à la création de l'Ecole Polytechnique, provisoirement nommée Ecole Centrale des Travaux Publics, dont il est le premier professeur d'analyse, d'ailleurs peu apprécié. Il écrit encore 2 traités mathématiques (*Théorie des fonctions analytiques - Résolution des équations numériques*), moins bien accueillis que celui de mécanique analytique. Il se remarie en 1792 avec une jeune fille qui lui est toute dévouée. Il décède le 10 avril 1813, après avoir reçu de Napoléon Ier tous les honneurs de la nation française (comte de l'empire, Grand Officier de la Légion d'Honneur).

Chapitre 8

Cinématique du point

En physique, la cinématique est la discipline de la mécanique qui étudie le mouvement des corps, en faisant abstraction des causes du mouvement (celles-ci sont généralement modélisées par des forces et des moments). Elle utilise la géométrie analytique.

La cinématique nous permettra d'identifier une trajectoire, une vitesse, une accélération, bref tout ce qui pourrait concerner un déplacement dans le temps, sans notion de masse.

On peut dater la naissance de la cinématique moderne à l'allocution de Pierre Varignon le 20 janvier 1700 devant l'académie royale des sciences de Paris. À cette occasion il définit la notion d'accélération et montre comment il est possible de la déduire de la vitesse instantanée à l'aide d'une simple procédure de calcul différentiel.

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

8.1 Dérivées, trajectoire, vitesse et accélération

8.1.1 Trajectoire

Il faut d'abord définir un référentiel, c'est-à-dire un repère de l'espace et une référence pour le temps, une horloge. On utilise en général le référentiel lié au laboratoire, par exemple dont les axes suivent les arêtes des murs de la pièce, ou bien celle de la table, ou encore les direction géographiques Nord-Sud, Est-Ouest et haut-bas (si le laboratoire est immobile par rapport au sol). L'objet de base est le point matériel, défini par ses coordonnées (x, y, z) .

Concrètement, cet objet physique défini par trois paramètres représente soit un objet de petite taille (particule, petite bille), soit un objet de grande taille dont on néglige les effets de rotation sur lui-même. Nous appellerons cet objet le mobile. On ne s'intéresse alors qu'au mouvement dans l'espace du centre de gravité de ce mobile.

La trajectoire est donc la ligne décrite par n'importe quel point d'un objet en mouvement, et notamment par son centre de gravité.

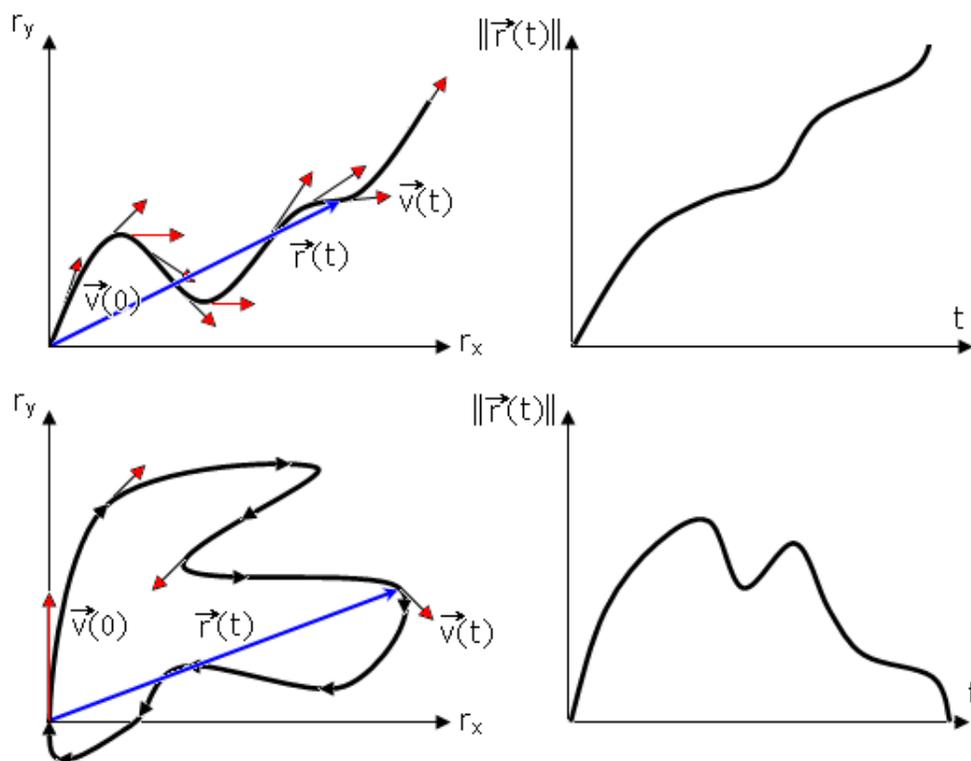


FIG. 8.1 – À gauche, deux trajectoires différentes : l'un des mobiles retourne à son point de départ (graphique du bas). Graphiques de la trajectoire indépendante du temps dans le plan Oxy (à gauche) et de la distance parcourue en fonction du temps $\|\vec{r}(t)\|$ (à droite) des deux mobiles.

Si les points R_0 et R sont successivement occupés par le mobile aux instants t_0 (instant initial) et t , la trajectoire du mobile entre ces deux points sera donnée par

$$\vec{r}(t) = R_0\vec{R}(t) = \vec{OR}(t) - \vec{OR}(t_0) = \vec{OR}(t) - \vec{OR}_0$$

Les coordonnées de $\vec{r}(t)$ définissent le vecteur-position du mobile à l'instant t .

De manière plus générale, - **définition** - la trajectoire est l'ensemble des points occupés successivement par le mobile.

L'équation de la trajectoire d'un point dans un repère donné est une relation indépendante du temps entre les coordonnées de ce point. Soit le vecteur-position $\vec{r} \equiv (r_x, r_y)$, l'équation de la trajectoire de ce point sera donnée par $r_y = f(r_x)$.

8.1.2 Vitesse moyenne et vitesse instantannée

Une définition formelle a longtemps manqué à la notion de vitesse, car les mathématiciens s'interdisaient de faire le quotient de deux grandeurs non homogènes. Diviser une distance par un temps leur

paraissaient donc aussi faux que pourrait nous sembler aujourd'hui la somme de ces deux valeurs. C'est ainsi que pour savoir si un corps allait plus vite qu'un autre, Galilée (1564-1642) comparait le rapport des distances parcourues par ces corps avec le rapport des temps correspondant. Il appliquait pour cela l'équivalence suivante :

$$\frac{s_1}{s_2} \leq \frac{t_1}{t_2} \Leftrightarrow \frac{s_1}{t_1} \leq \frac{s_2}{t_2}$$

La notion de vitesse instantanée est définie formellement pour la première fois par Pierre Varignon (1654-1722) le 5 juillet 1698, comme le rapport d'une longueur infiniment petite dx sur le temps infiniment petit dt mis pour parcourir cette longueur. Il utilise pour cela le formalisme du calcul différentiel mis au point quatorze ans plus tôt par Leibniz (1646-1716).

Il faut distinguer deux types de vitesse :

- La vitesse moyenne, qui répond très précisément à la définition élémentaire. Elle se calcule en divisant la distance parcourue par le temps de parcours.
- La vitesse instantanée, qui est obtenue par passage à la limite de la définition de la vitesse. Elle est définie à un instant précis, via la notion de dérivation $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Lorsqu'un mobile se déplace d'un point $R_1 = R(t_1)$ à un point $R_2 = R(t_2)$, nous pouvons définir la vitesse moyenne du mobile entre ces deux points par le rapport entre la distance parcourue et le temps mis pour la parcourir. Il s'agit donc d'exprimer une variation de la position d'un objet par rapport à un intervalle de temps.

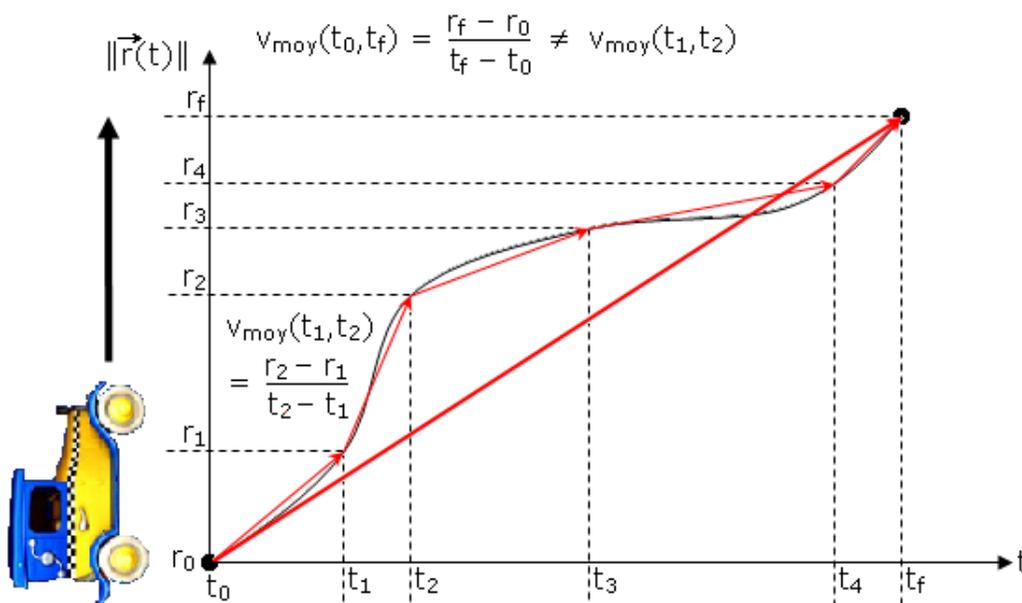


FIG. 8.2 – Illustration de la vitesse moyenne d'un mobile. La vitesse moyenne entre t_1 et t_2 est différente de la vitesse moyenne entre t_0 et t_f .

Par exemple, quand une voiture se déplace de 50 km en 2 heures, la vitesse moyenne est de 25 km/h car $v_{moy} = \frac{50 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

On a

$$\vec{v}_{moy} = \frac{O\vec{R}_2 - O\vec{R}_1}{t_2 - t_1} = \frac{R_1\vec{R}_2}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}$$

où $O\vec{R}_1$ et t_1 sont la position et le moment initiaux, tandis que $O\vec{R}_2$ et t_2 sont la position et le moment finaux de la vitesse.

Lors de cette opération, nous pouvons constater que, $\frac{1}{(t_2 - t_1)}$ étant un scalaire, le vecteur vitesse moyenne du mobile sera dans le sens de la trajectoire : de R_1 à R_2 . Donc, la vitesse moyenne du mobile dans un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ donné s'exprimera par

$$\vec{v}_{moy}(t_1, t_2) = \frac{O\vec{R}(t_2) - O\vec{R}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

En considérant que $t_1 = t$ et $t_2 = t'$, Lorsqu'on passe à la limite pour $t' \rightarrow t$, on obtient la vitesse instantannée du mobile :

$$\vec{v}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \vec{v}_{moy}(t, t') = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t')}{t - t'} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

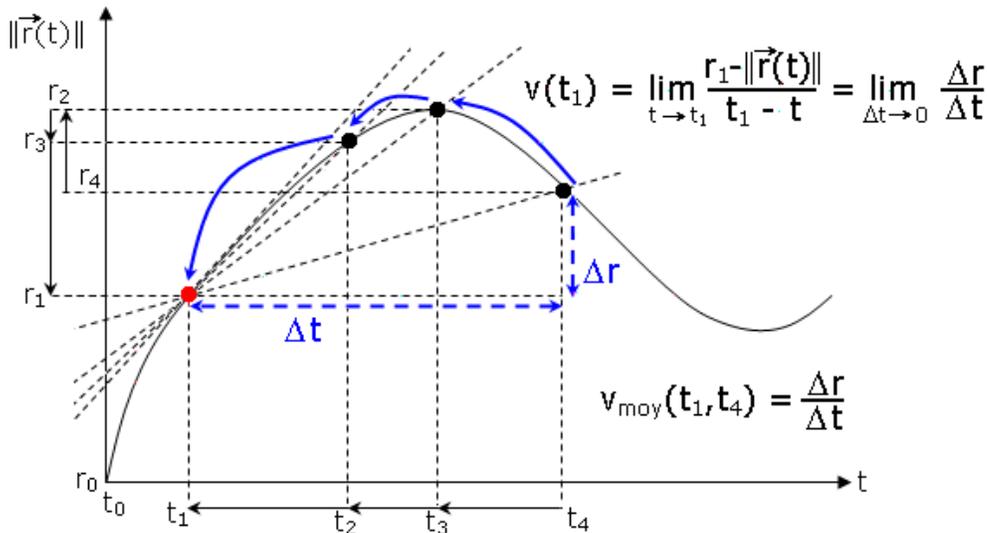


FIG. 8.3 – Vitesse instantannée d'un mobile en fonction du temps. La vitesse instantannée au temps t est donnée par le coefficient angulaire de la tangente au graphique du déplacement $\|\vec{r}(t)\|$ à cet instant t .

Lorsqu'un mobile se déplace d'un point de coordonnées \vec{r} à un point \vec{r}' très proche, nous pouvons définir la vitesse moyenne du mobile entre ces deux points par le rapport entre la distance parcourue et le temps mis pour la parcourir. Il s'agit donc d'exprimer une variation de la position d'un objet par rapport à un intervalle de temps.

À la limite, pendant l'intervalle de temps $[t, t'] = [t, t + dt]$ infiniment petit, le mobile effectue un déplacement infiniment petit effectué de \vec{r} à $\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$. Sa vitesse instantannée $\vec{v}(t)$ sera donc donnée

par le rapport $\frac{\vec{r} + d\vec{r} - \vec{r}}{t + dt - t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

La vitesse instantannée donne la vitesse d'un objet en un point. Par exemple, lorsque, dans une voiture, le compteur indique 90 km/h , alors la norme de la vitesse instantannée de la voiture est de 90 km/h .

Avec la trajectoire $\vec{r}(t)$ et la notation $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, nous avons que la vitesse instantannée est la dérivée de la position par rapport au temps et nous pouvons écrire.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

De plus, de par la signification physique de la dérivée, nous pouvons déduire de ce qui précède que le vecteur vitesse instantannée est toujours tangent à la trajectoire du mobile.

Dans le cas d'un mobile évoluant de manière rectiligne et à vitesse constante, le vecteur vitesse instantannée sera dans le sens de la trajectoire, tout comme le vecteur vitesse moyenne. Le cas se compliquera dans l'étude du mouvement circulaire, où la vitesse moyenne du mobile sera nulle étant donné qu'il tourne en rond.

Hodographe des vitesses

L'extrémité des vecteurs vitesse de la trajectoire, ramenés à une origine fixe, décrit l'hodographe des vitesses.

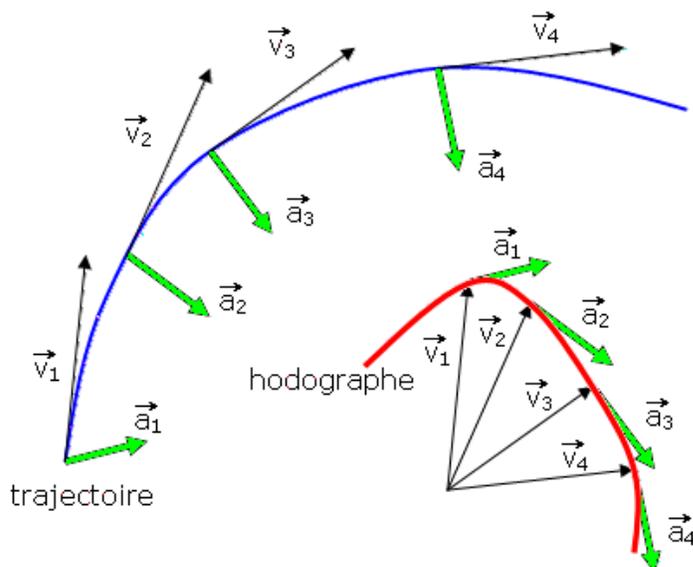


FIG. 8.4 – Trajectoire (à gauche) et hodographe des vitesses (à droite). L'accélération instantannée est tangente à l'hodographe des vitesses.

8.1.3 Accélération moyenne et accélération instantannée

L'accélération d'un mobile est le taux de variation de sa vitesse. En d'autres mots, son accélération est le rapport entre une variation de sa vitesse ($\Delta\vec{v}$) et la durée durant laquelle cette variation de la vitesse se produit (Δt).

Considérons l'acception populaire signifiant « aller plus vite » (accélération) : si la vitesse d'un objet augmente de 1 mètre par seconde (m/s) en une seconde (par exemple sa vitesse passe de 3 m/s à 4 m/s en une s), son accélération est de 1 « mètre par seconde » par seconde, soit 1 $\frac{m/s}{s}$, que l'on note aussi $1 \frac{m}{s^2}$ ou $1 m.s^{-2}$.

L'accélération est représentée par un vecteur et donc mesurée en mètres par seconde carrée.

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Cette définition formelle de l'accélération a été présentée pour la première fois par Pierre Varignon le 20 janvier 1700 dans une communication devant l'académie royale des sciences de Paris. De la même façon qu'il avait bâti la notion de vitesse, il a défini l'accélération par une simple opération de calcul différentiel (accélération instantannée).

Il faut distinguer deux types d'accélération :

- L'accélération moyenne, qui répond très précisément à la définition élémentaire. Elle se calcule en divisant la variation de vitesse qu'effectue le mobile sur son parcours par le temps de parcours.
- L'accélération instantannée, qui est obtenue par passage à la limite de la définition de l'accélération. Elle est définie à un instant précis, via la notion de dérivation $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Lorsqu'un mobile passe d'une vitesse $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$ à une vitesse $\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2)$, nous pouvons définir l'accélération moyenne du mobile entre ces deux vitesses par le rapport entre la variation de vitesse et le temps mis pour l'effectuer. Il s'agit donc d'exprimer une variation de la vitesse d'un objet par rapport à un intervalle de temps.

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

où \vec{v}_1 et t_1 sont la vitesse et le moment initiaux, tandis que \vec{v}_2 et t_2 sont la vitesse et le moment finaux de l'accélération.

Lors de cette opération, nous pouvons constater que, $\frac{1}{(t_2-t_1)}$ étant un scalaire, le vecteur accélération moyenne du mobile sera dans le sens de la variation du vecteur vitesse : de \vec{v}_1 à \vec{v}_2 . Donc, l'accélération moyenne du mobile dans un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ donné s'exprimera par

$$\vec{a}_{moy}(t_1, t_2) = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

En considérant que $t_1 = t$ et $t_2 = t'$, Lorsqu'on passe à la limite pour $t' \rightarrow t$, on obtient l'accélération instantannée du mobile :

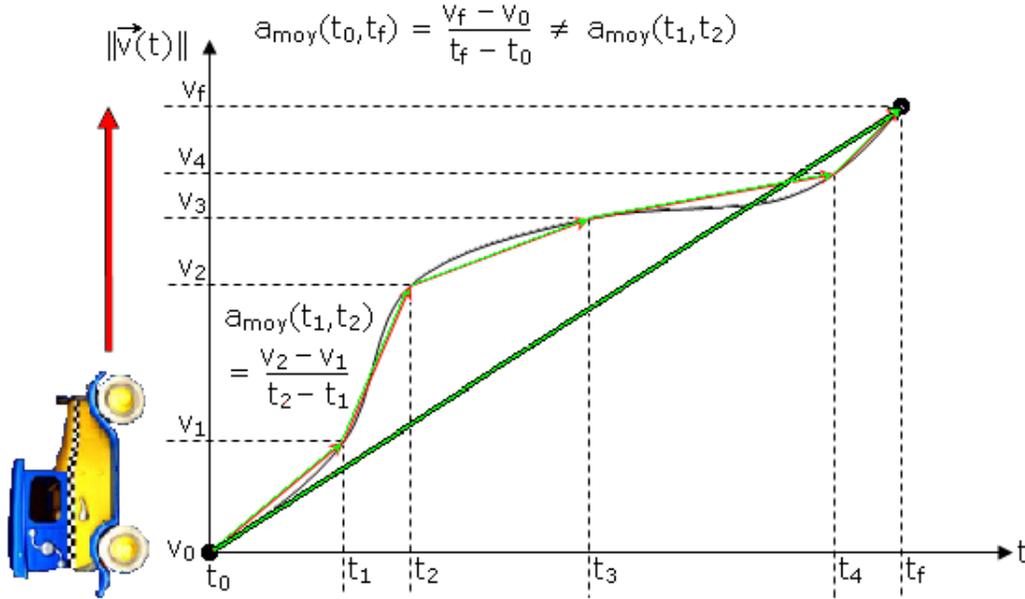


FIG. 8.5 – Illustration de l'accélération moyenne d'un mobile. L'accélération moyenne entre t_1 et t_2 est différente de l'accélération moyenne entre t_0 et t_f .

$$\vec{a}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \vec{a}_{moy}(t, t') = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t')}{t - t'} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t)$$

Lorsqu'un mobile passe d'une vitesse \vec{v} à une vitesse \vec{v}' très proche, nous pouvons définir l'accélération moyenne du mobile entre ces deux vitesses par le rapport entre la variation de vitesse et le temps mis pour effectuer cette variation. Il s'agit donc d'exprimer une variation de la vitesse d'un objet par rapport à un intervalle de temps.

À la limite, pendant l'intervalle de temps $[t, t'] = [t, t + dt]$ infiniment petit, le mobile effectue une variation de vitesse infiniment petite effectuée de \vec{v} à $\vec{v}' = \vec{v} + d\vec{v}$. Son accélération instantanée sera donc donnée par le rapport $\frac{\vec{v} + d\vec{v} - \vec{v}}{t + dt - t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Avec la vitesse $\vec{v}(t)$ et la notation $\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, nous avons que l'accélération instantanée est la dérivée de la vitesse instantanée en fonction du temps et nous pouvons écrire.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t)$$

De plus, de par la signification physique de la dérivée, nous pouvons déduire de ce qui précède que le vecteur accélération instantanée est toujours dans le sens du changement de direction.

Dans le cas d'un mobile évoluant de manière rectiligne et à vitesse constante, le vecteur accélération instantanée sera dans le sens de la trajectoire, tout comme le vecteur accélération moyenne. Le cas se compliquera dans l'étude du mouvement circulaire, où l'accélération moyenne du mobile sera nulle étant donné qu'il tourne en rond, mais son accélération instantanée incurve sa trajectoire puisque nous

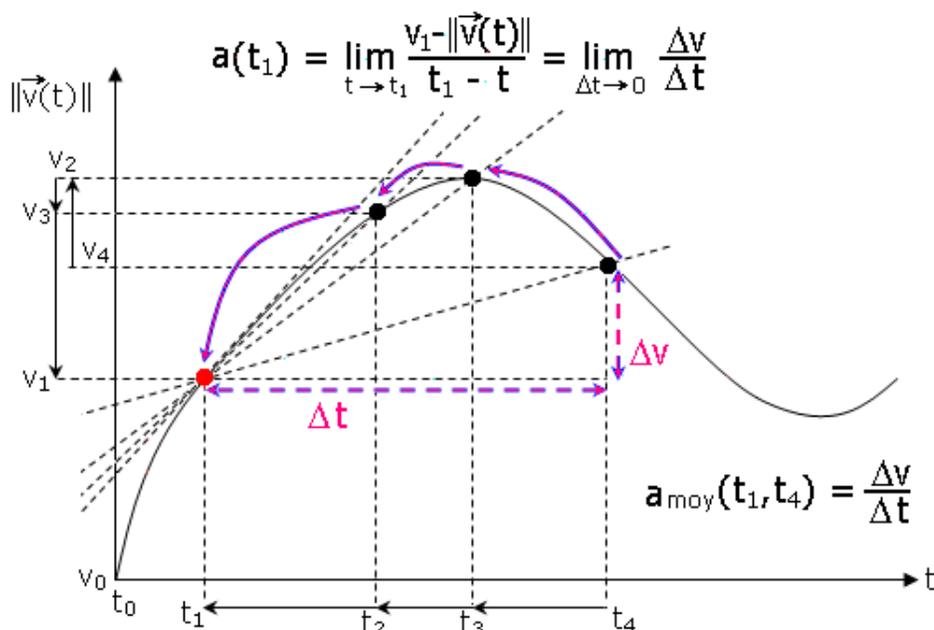


FIG. 8.6 – Accélération instantanée d'un mobile en fonction du temps. L'accélération instantanée au temps t est donnée par le coefficient angulaire de la tangente au graphique de la vitesse $\|\vec{v}(t)\|$ à cet instant t .

avons dit plus haut que le vecteur accélération instantanée était toujours dans le sens du changement de direction.

Dans la vie courante, on distingue en effet trois événements que la physique regroupe sous le seul concept d'accélération :

- Aller plus vite : accélérer (au sens commun plus restrictif). L'accélération est positive, c'est-à-dire que le vecteur accélération possède une composante dans le sens de la vitesse.
- Aller moins vite : décélérer (ou freiner, ralentir dans le langage commun). L'accélération est négative, ou le vecteur accélération possède une composante opposée au sens de la vitesse.
- Changer de direction (tourner ou virer dans le langage commun). L'accélération est perpendiculaire à la vitesse, si celle-ci change de direction sans changer de norme).

« Accélérer » peut finalement se résumer dans le sens de « modifier une vitesse ».

Dans ce cours, l'intérêt d'introduire l'hodographe des vitesses était que, de la même manière que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du mobile, le vecteur accélération est tangent à l'hodographe des vitesses de ce mobile.

De plus, si on décompose le vecteur accélération \vec{a} en une accélération tangentielle au mouvement \vec{a}_t et en une accélération normale \vec{a}_n . On peut prouver (nous le ferons dans le chapitre sur la dynamique)

que

$$\vec{a}_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \vec{1}_t$$

et

$$\vec{a}_n = -\frac{\|\vec{v}\|^2}{\rho} \vec{1}_n$$

où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire. Il se définit par $\rho = \frac{d\|\vec{r}\|}{d\theta}$ où l'angle θ représente l'angle formé entre la droite passant par le centre de la rotation et de vecteur directeur $\vec{1}_n(t)|_{t=t_0}$ et le vecteur $\vec{1}_n(t)$.

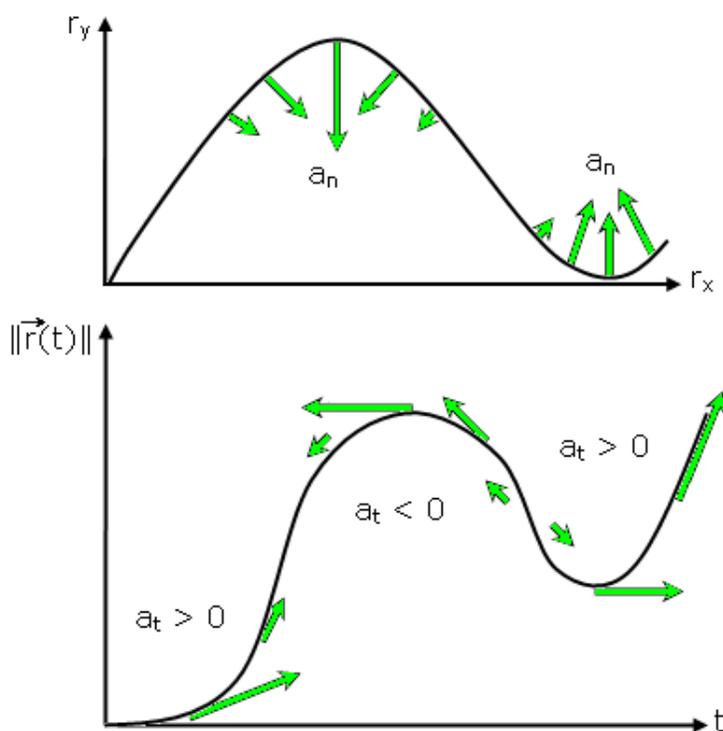


FIG. 8.7 – Représentations de l'accélération normale (en haut) et tangentielle (en bas) d'un mouvement : illustration des phénomènes d'accélération, décélération et de changement de direction.

L'accélération tangentielle \vec{a}_t décrit la variation du module de la vitesse par unité de temps. Par contre, l'accélération normale \vec{a}_n est due à une variation de la direction du mouvement, avec $\|\vec{v}\|$ constant ou non. Tant que la direction de \vec{v} change, il y a accélération centripète, et pour un parcours circulaire ceci est toujours le cas. Si la direction et le module de \vec{v} varient tous les deux, les deux accélérations \vec{a}_t et \vec{a}_n existent et sont perpendiculaires.

8.1.4 Equation différentielle du mouvement

Nous avons vu que la vitesse

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

et l'accélération

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$$

peuvent s'exprimer comme

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\ \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \end{cases}$$

En combinant les deux équations différentielles, nous avons :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Nous avons donc établi le lien entre trajectoire, vitesse instantannée et accélération instantannée d'un mobile.

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \\ \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \end{cases}$$

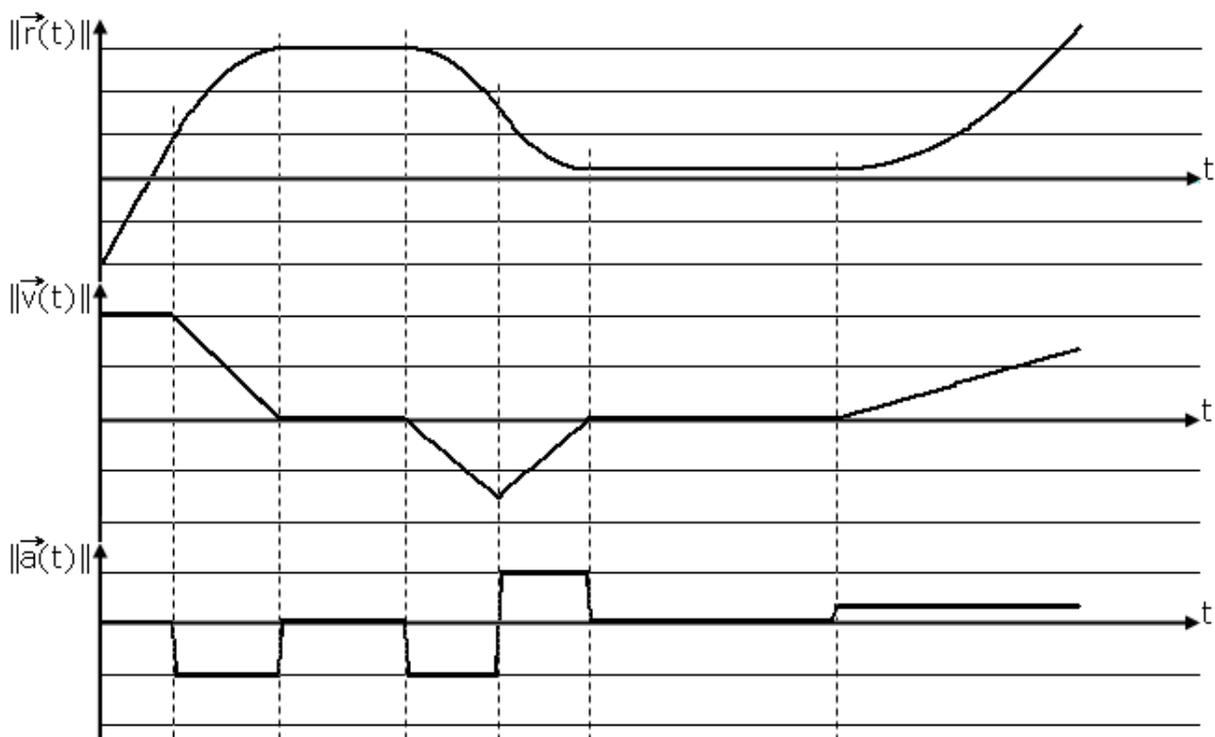


FIG. 8.8 – Graphiques du déplacement, de la vitesse instantannée et de l'accélération instantannée en fonction du temps. Les trois graphiques sont corrélés via l'opération de dérivation $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t)$.

La question de déduire l'accélération ou la vitesse de la trajectoire est triviale à partir du moment où l'on maîtrise un minimum l'outil des dérivées. De même que déduire l'accélération de la vitesse sera aussi. Déduire la vitesse connaissant l'accélération ou déduire la trajectoire connaissant la vitesse nécessitera d'employer le calcul intégral. Déduire la trajectoire à partir de l'accélération nécessitera donc

d'intégrer deux fois l'accélération par rapport au temps.

Par exemple, lorsqu'un corps, lâché sans vitesse, chute verticalement d'une hauteur h , son accélération g valant environ 10 m/s^2 , sa trajectoire sera donnée par

$$r(t) = \iint \ddot{r}(t) dt^2 = \iint a dt^2 = \iint g dt^2 = \int \left(\int 10 dt \right) dt = \int (10t + C_1) dt = 10t^2/2 + C_1t + C_2$$

Il faudra déduire les constantes C_1 et C_2 des conditions initiales $r_{(t=0)} = h$ et $\dot{r}_{(t=0)} = v_{(t=0)} = 0$.

8.2 Mouvements particuliers

On distingue différents mouvements particuliers en cinématique :

- La trajectoire d'un mouvement rectiligne est une droite.
- La trajectoire d'un mouvement circulaire est un cercle.
- Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement uniforme, la norme de son vecteur vitesse est constante.
- Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, son vecteur vitesse est constant (en direction, en sens et en norme).
- Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement uniformément accéléré, la norme de son vecteur accélération est constant.
- Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne et uniformément accéléré, son vecteur accélération est constant (en direction, en sens et en norme).
- Au cours d'un mouvement de translation d'un solide, à chaque instant, tous les points du solide ont le même vecteur vitesse.
- Au cours d'un mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe, tous les points du solide ont des trajectoires circulaires dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation et centrées sur cet axe.

8.2.1 Mouvement rectiligne uniforme

Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, son vecteur vitesse est constant (en direction, en sens et en norme). Donc, $\vec{v}(t) = \vec{v}$ et $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v'_x = 0 \\ v'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \text{ constante} \\ v_y = v_{0y} \text{ constante} \end{cases}$$

Donc, on a, avec la connaissance de la vitesse du mobile $\vec{v} \equiv (v_{0x}, v_{0y})$,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dr_x}{dt} = v_{0x} \\ \frac{dr_y}{dt} = v_{0y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dr_x = v_{0x} dt \\ dr_y = v_{0y} dt \end{cases}$$

Avec la condition initiale $\vec{r}(t)|_{t=t_0} = \vec{r}_0$, qui peut donc s'exprimer par les deux équations $r_x(t_0) = r_{0x}$ et $r_y(t_0) = r_{0y}$ et que nous allons injecter dans le système que nous étudions, nous obtenons.

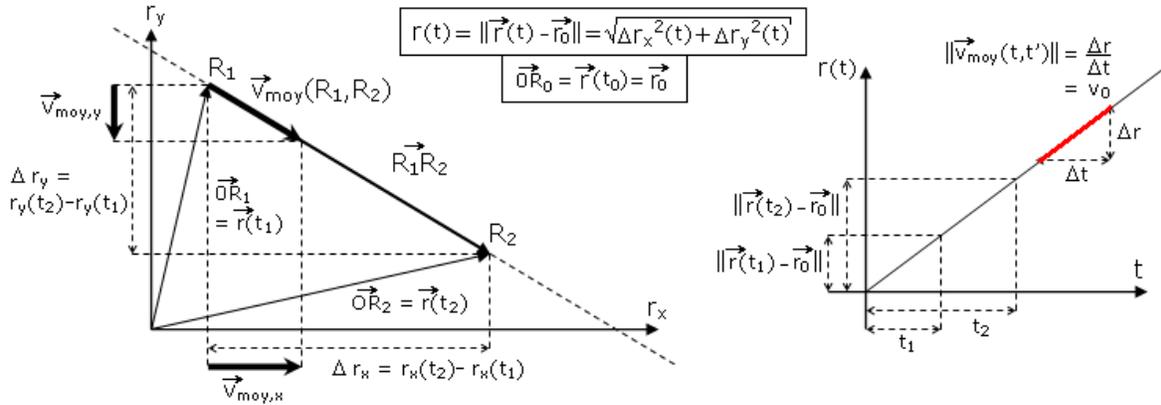


FIG. 8.9 – Mouvement rectiligne uniforme : trajectoire du mobile dans le plan Oxy (à gauche) et déplacement effectué en fonction du temps $\|\vec{r}(t)\|$ (à droite)

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{r_{0x}}^{r_x} dr_x = \int_{t_0}^t v_{0x} dt \\ \int_{r_{0y}}^{r_y} dr_y = \int_{t_0}^t v_{0y} dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [r_x]_{r_{0x}}^{r_x} = v_{0x} [t]_{t_0}^t \\ [r_y]_{r_{0y}}^{r_y} = v_{0y} [t]_{t_0}^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_x - r_{0x} = v_{0x}(t - t_0) \\ r_y - r_{0y} = v_{0y}(t - t_0) \end{cases}$$

En conclusion, nous pouvons constater que ce système, qui peut s'écrire de manière condensée

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0)}$$

se présente comme deux équations dépendant d'un paramètre commun : le temps. On pourra donc faire abstraction du temps pour dessiner la trajectoire du projectile sur un plan Oxy .

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} r_x(t) = v_{0x}(t - t_0) + r_{0x} \\ r_y(t) = v_{0y}(t - t_0) + r_{0y} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{r_x - r_{0x}}{v_{0x}} + t_0 = t \\ \frac{r_y - r_{0y}}{v_{0y}} + t_0 = t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{r_x - r_{0x}}{v_{0x}} + t_0 = \frac{r_y - r_{0y}}{v_{0y}} + t_0 \\ &\Leftrightarrow r_y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} r_x + (r_{0y} - r_{0x} \frac{v_{0y}}{v_{0x}}) \end{aligned}$$

En posant $m = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ et $p = r_{0y} - r_{0x} \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$, on constate que la trajectoire du projectile considéré sera rectiligne, étant donné que nous avons l'équation d'une droite.

$$\Leftrightarrow r_y = m r_x + p$$

8.2.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, son vecteur accélération est constant (en direction, en sens et en norme). Donc, $\vec{a}(t) = \vec{a}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_x(t) = a_x \text{ constante} \\ a_y(t) = a_y \text{ constante} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dv_x = a_x dt \\ dv_y = a_y dt \end{cases}$$

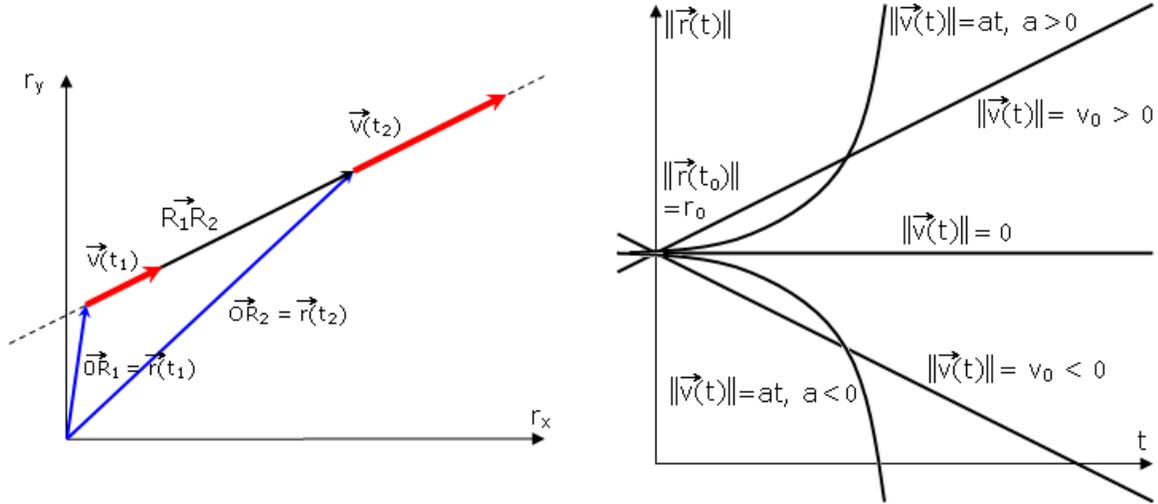


FIG. 8.10 – Mouvement rectiligne uniformément : trajectoire du mobile dans le plan Oxy (à gauche) et déplacement effectué en fonction du temps $\|\vec{r}(t)\|$ (à droite). La trajectoire de gauche correspond à une accélération $a > 0$, puisque la vitesse $\|\vec{v}(t)\|$ augmente avec le déplacement.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int dv_x = \int a_x dt \\ \int dv_y = \int a_y dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x - v_{0x} = a_x(t - t_0) \\ v_y - v_{0y} = a_y(t - t_0) \end{cases}$$

Nous pouvons constater que ce système, qui peut s'écrire de manière condensée

$$\boxed{\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a}(t - t_0)}$$

Donc, on a, avec la connaissance de la vitesse initiale du mobile $\vec{v}_0 \equiv (v_{0x}, v_{0y})$,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_x = a_x(t - t_0) + v_{0x} \\ v_y = a_y(t - t_0) + v_{0y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dr_x}{dt} = a_x(t - t_0) + v_{0x} \\ \frac{dr_y}{dt} = a_y(t - t_0) + v_{0y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dr_x = (a_x(t - t_0) + v_{0x})dt \\ dr_y = (a_y(t - t_0) + v_{0y})dt \end{cases}$$

Avec la condition initiale $\vec{r}(t)|_{t=t_0} = \vec{r}_0$, qui peut donc s'exprimer par les deux équations $r_x(t_0) = r_{0x}$ et $r_y(t_0) = r_{0y}$ et que nous allons injecter dans le système que nous étudions, nous obtenons.

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{r_{0x}}^{r_x} dr_x = \int_{t_0}^t (a_x(t - t_0) + v_{0x})dt \\ \int_{r_{0y}}^{r_y} dr_y = \int_{t_0}^t (a_y(t - t_0) + v_{0y})dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [r_x]_{r_{0x}}^{r_x} = a_x \left[\frac{t^2}{2} - t_0 t \right]_{t_0}^t + v_{0x} [t]_{t_0}^t \\ [r_y]_{r_{0y}}^{r_y} = a_y \left[\frac{t^2}{2} - t_0 t \right]_{t_0}^t + v_{0y} [t]_{t_0}^t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_x - r_{0x} = a_x \frac{(t-t_0)^2}{2} + v_{0x}(t - t_0) \\ r_y - r_{0y} = a_y \frac{(t-t_0)^2}{2} + v_{0y}(t - t_0) \end{cases}$$

En conclusion, nous pouvons constater que ce système, qui peut s'écrire de manière condensée

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{a} \frac{(t-t_0)^2}{2} + \vec{v}_0(t - t_0)}$$

« contient » l'équation de la vitesse instantannée $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ donnée par

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) - \vec{r}_0) = \frac{d}{dt} \left(\vec{a} \frac{(t - t_0)^2}{2} + \vec{v}_0(t - t_0) \right) \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \vec{a}(t - t_0) + \vec{v}_0$$

et, si $\vec{a} = \vec{0}$, on retrouve le MRU

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0)}$$

chute libre d'un corps

On se trouve dans un cas à une dimension où le corps en mouvement ne peut que « monter » ou « descendre ». Cependant, il convient de ne pas négliger la notation vectorielle \vec{r} car celle-ci nous permettra d'être systématique dans nos calculs et d'éviter de fréquentes erreurs de signes.

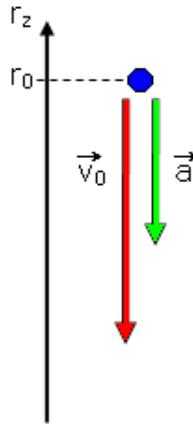


FIG. 8.11 – chute libre d'un corps. Le sens de l'axe r_z est choisi arbitrairement vers le haut. Dans ces conditions, l'accélération gravitationnelle sera dirigée vers le bas.

Considérons un pot de fleur, lâché à l'instant $t_0 = 0$ avec une vitesse initiale \vec{v}_0 nulle, tombant d'une hauteur $h = \|\vec{r}_0\|$ sur la tête d'un passant. Pendant sa chute, le pot est soumis à une accélération $\vec{a}(t) = \vec{g}$ dirigée vers le bas. La vitesse instantannée du pot au moment t_{final} de l'impact avec la tête du passant située à une hauteur $\|\vec{r}_{final}\| = 0$ sera donnée par

$$\vec{v}(t_{final}) = \vec{a}(t_{final} - t_0) + \vec{v}_0 = \vec{a}(t_{final} - 0) + \vec{0} = \vec{a} t_{final}$$

Le temps de chute t_{final} sera donné en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_{final}) - \vec{r}_0 &= \vec{a} \frac{(t_{final} - 0)^2}{2} + \vec{0}(t_{final} - 0) \\ \Leftrightarrow -\vec{r}_0 \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot \vec{a} \frac{t_{final}^2}{2} + \vec{0} \cdot \vec{a} t_{final} \\ \Leftrightarrow t_{final}^2 &= -2 \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \end{aligned}$$

Or, comme \vec{r}_0 et \vec{a} sont de sens opposés, ils forment un angle $\alpha = \pi$ et leur produit scalaire vaut donc l'opposé du produit de leur norme $-|\vec{r}_0| \cdot |\vec{a}|$. Donc, si $|\vec{a}| = g$, le temps de chute t_{final} sera donné par

$$t_{final} = \sqrt{2 \frac{h}{g}}$$

Dans des problèmes plus généraux, on utilisera l'équation

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{a} \frac{(t-t_0)^2}{2} + \vec{v}_0(t-t_0)}$$

pour déduire le temps de la position ou vice-versa, et on utilisera l'équation

$$\boxed{\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a}(t-t_0)}$$

pour déduire le temps de la vitesse ou vice-versa.

Exemple : un corps se trouve à l'instant $t_0 = 0$ s à une hauteur $|\vec{r}_0|$ de 200 m. 10 secondes plus tard (t_{final}), il se trouve à la hauteur $|\vec{r}(t_{final})|$ de 150 m. Déterminer sa vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{v}(t)|_{t=0}$ si l'on considère que $g \approx 10 \frac{m}{s^2}$.

$$150 \cdot \vec{1}_z - 200 \cdot \vec{1}_z = -10 \cdot \vec{1}_z \frac{(10-0)^2}{2} + v_0 \cdot \vec{1}_z (10-0) \Leftrightarrow v_0 \cdot \vec{1}_z = 45 \cdot \vec{1}_z \frac{m}{s}$$

Ce qui signifie que le corps est, au temps $t_0 = 0$, lancé vers le haut et après avoir atteint une hauteur maximum, il retombe.

La hauteur maximum atteinte par ce corps lancé vers le haut nous sera donné indirectement par l'équation de la vitesse. En effet, pendant que le corps monte, sa vitesse est « positive ». Il ralentit, freiné par la gravité. Lorsque le corps commence à tomber, sa vitesse devient « négative ». Donc, au moment où le corps atteint sa hauteur maximum, sa vitesse s'annule car elle passe, à cet endroit, du « positif » au « négatif » (et donc forcément par zéro).

On a l'équation

$$\vec{0} - 45 \cdot \vec{1}_z = -10 \cdot \vec{1}_z (t_{montee} - 0) \Leftrightarrow t_{montee} = \frac{-45 \frac{m}{s}}{-10 \frac{m}{s^2}} = 4,5 \text{ s}$$

Donc, en utilisant l'équation de la trajectoire, on a finalement

$$h_{max} \vec{1}_z - 200 \cdot \vec{1}_z = -10 \cdot \vec{1}_z \frac{(4,5-0)^2}{2} + 45 \vec{1}_z (4,5-0) \Leftrightarrow h_{max} = 200 - 10 \cdot 4,5^2/2 + 45 \cdot 4,5 = 301,25 \text{ m}$$

Maintenant, si, au lieu de considérer que le corps tombe de 200 m à 150 m en 10 secondes, considérons que le corps tombe, dans les mêmes conditions, de 200 m à 150 m en 1 seule seconde.

On a l'équation

$$150 \cdot \vec{1}_z - 200 \cdot \vec{1}_z = -10 \cdot \vec{1}_z \frac{(1-0)^2}{2} + v_0 \cdot \vec{1}_z (1-0) \Leftrightarrow v_0 \cdot \vec{1}_z = -45 \cdot \vec{1}_z \frac{m}{s}$$

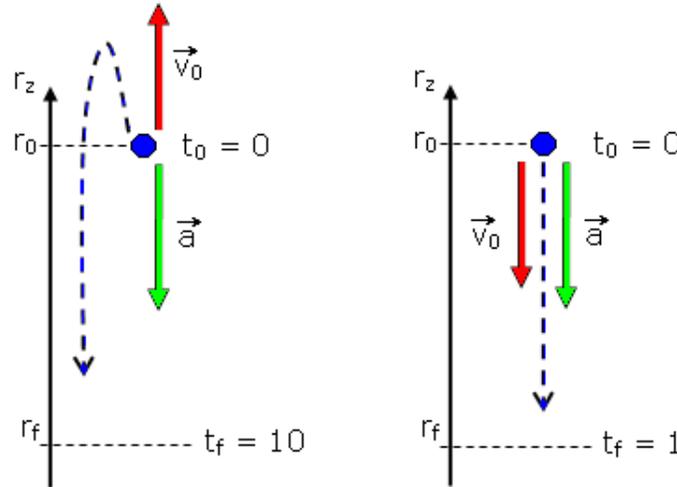


FIG. 8.12 – Dans le premier cas, le pot de fleur met 10 secondes pour « chuter » de 50 mètres, alors que dans le deuxième cas, le corps ne met qu’une seule seconde pour « chuter » de ces mêmes 50 mètres. Nous pouvons en déduire que, dans le premier cas, le corps a initialement été lancé vers le haut avant de retomber, ce qui explique le signe obtenu pour v_0 dans les deux cas.

Ce qui signifie que le corps est, au temps $t_0 = 0$, lancé vers le bas.

Après 1 seconde de chute, le corps aura une vitesse $\vec{v}(t_{final})$ donnée par l’équation

$$\vec{v}(t_{final}) - (-45) \cdot \vec{1}_z = -10 \cdot \vec{1}_z (1 - 0) \Leftrightarrow \vec{v}(t_{final}) = -55 \cdot \vec{1}_z \frac{m}{s}$$

8.2.3 Mouvement circulaire uniforme

Le mouvement est dit circulaire si sa trajectoire est un cercle. On le qualifie d’uniforme lorsque la norme $\|\vec{v}(t)\|$ du vecteur vitesse est constante.

La trajectoire d’un tel point sera représentée par un vecteur $\vec{r}(t)$ de norme $\|\vec{r}(t)\|$ constante tournant autour d’un point O , centre de la rotation. On a

$$\vec{r}(t) = \|\vec{r}(t)\| \cdot \vec{1}_n(t) = R \cdot \vec{1}_n(t)$$

Etant donné que la norme de la vitesse est constante, nous avons que l’accélération tangentielle $\vec{a}_t(t) = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \vec{1}_t(t)$ est nulle.

L’accélération normale $\vec{a}_n = -\frac{\|\vec{v}\|^2}{R} \vec{1}_n(t)$ sera constante et dirigée vers l’intérieur du cercle étant donné que le rayon de courbure R d’un cercle est constant.

Rappelons que le rayon de courbure ρ se définit par $\rho = \frac{d\|\vec{r}\|}{d\theta}$ où l’angle θ représente l’angle formé entre la droite passant par le centre de la rotation et de vecteur directeur $\vec{1}_n(\theta_0)$ et le vecteur $\vec{1}_n(\theta)$.

Nous pouvons donc déduire de ce qui précède et de la définition du radian ($\theta = \frac{s}{R}$ rad) que la distance s parcourue par le mobile en fonction de l'angle θ sera donnée par

$$s = R(\theta - \theta_0)$$

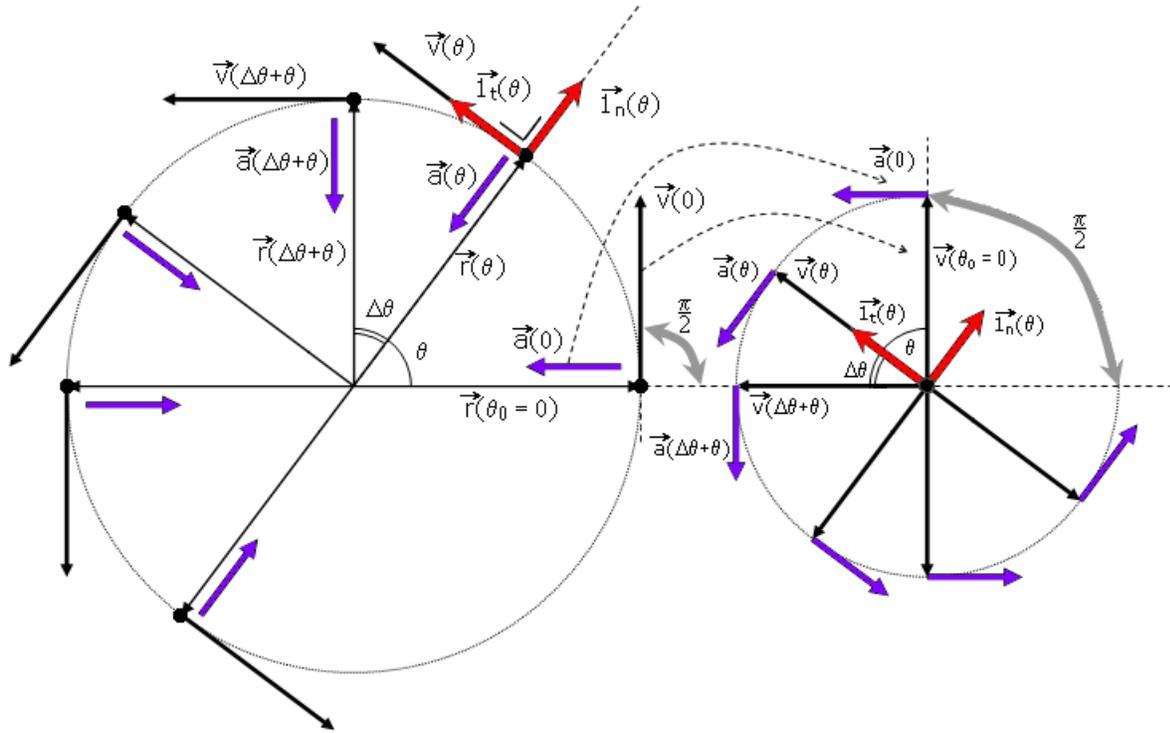


FIG. 8.13 – Mouvement circulaire uniforme : trajectoire (à gauche) et hodographe (à droite) d'un mobile tournant autour d'un point à vitesse angulaire constante.

Or, la vitesse instantanée du mobile correspond à la dérivée par rapport au temps de son déplacement s et est tangente à sa trajectoire. Dans le cas du mouvement circulaire uniforme, la vitesse sera donc toujours dans le même sens que le vecteur unitaire $\vec{I}_t(t)$ et de norme constante.

Puisque $\|\vec{v}(t)\|$ est constante et que $\Delta s = R \Delta\theta$,

$$\|\vec{v}(t)\| = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{R}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}$$

Donc, pour que la norme de la vitesse soit constante, la dérivée de l'angle θ par rapport au temps t doit donc être, elle aussi, constante. Ce qui implique que l'angle θ dépend d'une fonction du 1^{er} degré du temps

$$\theta(t) = \omega (t - t_0)$$

avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ ($\frac{rad}{s}$) constante et le déphasage $\theta_0 = \omega t_0$ (rad).

Finalement, la vitesse du mobile nous sera donnée par

$$\|\vec{v}\| = R\dot{\theta} = R\omega$$

Et l'accélération normale par

$$\|\vec{a}_n\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R} = R \omega^2$$

Mouvement périodique

Le mouvement circulaire uniforme est un mouvement périodique, c'est-à-dire qu'il se reproduit identique à lui-même au bout d'intervalles de temps égaux. La période T est le temps mis par le mobile pour parcourir un tour complet. On a donc $\omega T = 2\pi$ qu'on peut aussi écrire

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu \quad \text{et} \quad \|\vec{v}\| = R \frac{2\pi}{T} = 2R \pi \nu$$

où ν est la fréquence, c'est-à-dire le nombre de tours parcourus par le mobile par seconde :

$$\nu = \frac{1}{T} \text{ Hz}$$

où le Hertz Hz est défini par $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$.

Résolution à l'aide des dérivées

Remarquons que nous pouvons aussi arriver à ces résultats en considérant l'équation différentielle du mouvement $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$, l'équation de la vitesse $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ et que $\vec{r}(t) = R \cdot \vec{1}_n(t)$. On a

$$\begin{aligned} \vec{1}_n(\theta) &= \cos \theta \vec{1}_x + \sin \theta \vec{1}_y \\ \Leftrightarrow \vec{1}_n(t) &= \cos \omega(t - t_0) \vec{1}_x + \sin \omega(t - t_0) \vec{1}_y \end{aligned}$$

Donc, si nous voulons obtenir la vitesse instantannée, nous allons devoir dériver le vecteur position $\vec{r}(t)$ par rapport au temps. On a

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= R \frac{d\vec{1}_n(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow \vec{v}(t) &= R \frac{d}{dt} \left(\cos \omega(t - t_0) \vec{1}_x + \sin \omega(t - t_0) \vec{1}_y \right) \\ \Leftrightarrow \vec{v}(t) &= R\omega \left(-\sin \omega(t - t_0) \vec{1}_x + \cos \omega(t - t_0) \vec{1}_y \right) \\ \Leftrightarrow \vec{v}(t) &= R\omega \vec{1}_t \end{aligned}$$

Pour obtenir l'accélération instantannée, nous allons devoir dériver deux fois le vecteur position $\vec{r}(t)$ par rapport au temps. On a

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= R \frac{d^2 \vec{1}_n(t)}{dt^2} \\ \Leftrightarrow \vec{a}(t) &= R\omega \frac{d}{dt} \left(-\sin \omega(t - t_0) \vec{1}_x + \cos \omega(t - t_0) \vec{1}_y \right) \\ \Leftrightarrow \vec{a}(t) &= R\omega^2 \left(-\cos \omega(t - t_0) \vec{1}_x - \sin \omega(t - t_0) \vec{1}_y \right) \\ \Leftrightarrow \vec{a}(t) &= -R\omega^2 \vec{1}_n \end{aligned}$$

Ces résultats sont en accord avec les résultats établis précédemment. On a donc, pour le mouvement circulaire uniforme, les équations du mouvement suivantes :

$$\boxed{\vec{r}(t) = R \cdot \vec{1}_n}$$

$$\vec{v}(t) = R\omega \cdot \vec{1}_t$$

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2 \cdot \vec{1}_n = -\frac{\|\vec{v}(t)\|}{R} \cdot \vec{1}_n$$

Avec les vecteurs $\vec{1}_n$ et $\vec{1}_t$ exprimés dans un plan muni de coordonnées cartésiennes (x, y) tels que

$$\begin{aligned} \vec{1}_n(t) &= \cos\theta \vec{1}_x + \sin\theta \vec{1}_y \\ &= \cos\omega(t - t_0) \vec{1}_x + \sin\omega(t - t_0) \vec{1}_y \end{aligned}$$

et, avec $\vec{1}_t(t) = \frac{d\vec{1}_n/dt}{\|d\vec{1}_n/dt\|}$,

$$\begin{aligned} \vec{1}_t(t) &= -\sin\theta \vec{1}_x + \cos\theta \vec{1}_y \\ &= -\sin\omega(t - t_0) \vec{1}_x + \cos\omega(t - t_0) \vec{1}_y \end{aligned}$$

Dans les équations ci-dessus, nous devrions en toute rigueur écrire « $\theta - \theta_0$ » au lieu de simplifier les notations et de tout simplement écrire « θ », car on peut poser

$$\theta - \theta_0 = \theta(t) - \theta(t_0) = \omega t - \omega t_0 = \omega(t - t_0)$$

En outre, dans la plupart des problèmes, on considère généralement $t_0 = 0$ comme l'instant initial. L'angle initial θ_0 est, quant à lui, considéré comme le déphasage correspondant à l'instant initial.

8.2.4 La parabole de tir

Lorsque l'on projette un caillou en essayant de le jeter le plus loin possible, le projectile décrit, dans l'espace, une courbe qui ressemble à une cloche. Si le corps est lancé du point P de coordonnées (r_{0x}, r_{0z}) avec une vitesse initiale \vec{v}_0 décrivant un angle α avec l'horizontale, son mouvement $\vec{r}(t)$ sera décomposé en un mouvement horizontal $r_x(t)$ (selon l'axe Ox) et un mouvement vertical $r_z(t)$ (selon l'axe Oz). Nous allons étudier ces deux mouvements perpendiculaires, $r_x(t)$ et $r_z(t)$, indépendamment.

Soit

$$\vec{v}_0 = \|\vec{v}_0\| \cos\alpha \cdot \vec{1}_x + \|\vec{v}_0\| \sin\alpha \cdot \vec{1}_z = v_{0x} \cdot \vec{1}_x + v_{0z} \cdot \vec{1}_z$$

et

$$\tan\alpha = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}$$

On a

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r_x(t) \cdot \vec{1}_x + r_z(t) \cdot \vec{1}_z \\ \vec{v}(t) &= v_x(t) \cdot \vec{1}_x + v_z(t) \cdot \vec{1}_z \\ \vec{a}(t) &= a_x(t) \cdot \vec{1}_x + a_z(t) \cdot \vec{1}_z \end{aligned}$$

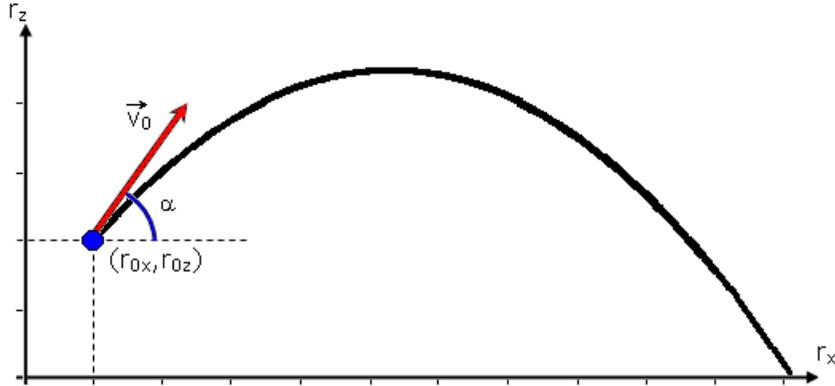


FIG. 8.14 – Trajectoire dans le plan Oxz d'un projectile tiré d'un point de coordonnées (r_{0x}, r_{0z}) avec une vitesse initiale de norme $\|\vec{v}_0\|$ formant un angle α avec l'horizontale.

Nous savons que le corps, dans la direction x , n'est soumis à aucune accélération : $a_x = 0$. Le mouvement du corps selon x sera donc un mouvement rectiligne uniforme (MRU) vu qu'aucune accélération selon x ne perturbera la vitesse $v_x(t) = v_{0x}$ selon x .

Dans la direction Oz , le corps est soumis à l'accélération de la gravité : $a_z = -g$. Le mouvement du corps selon z sera donc un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) vu qu'aucune autre accélération ne vient perturber la chute. Par contre, la vitesse $v_z(t) = -gt + v_{0z}$ du mobile sera proportionnelle au temps t .

On a

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= -g \cdot \vec{1}_z \\ \vec{v}(t) &= v_{0x} \cdot \vec{1}_x + v_z(t) \cdot \vec{1}_z\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}&\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_z(t) = -g(t - t_0) + v_{0z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} r_x(t) = v_{0x}(t - t_0) + r_{0x} \\ r_z(t) = -g \frac{(t - t_0)^2}{2} + v_{0z}(t - t_0) + r_{0z} \end{cases}\end{aligned}$$

Pour $t_0 = 0$ et $\vec{r}_0 \equiv (r_{0x}, r_{0y}) = (0, 0)$, nous avons les équations

$$\begin{cases} r_x(t) = v_{0x}t \\ r_z(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_{0z}t \end{cases}$$

Donc, si l'on remplace $t = \frac{r_x(t)}{v_{0x}}$ dans la deuxième équation, on trouve

$$r_z(t) = -g \frac{r_x^2(t)}{2v_{0x}^2} + \frac{r_x(t)}{v_{0x}} v_{0z}$$

$$\Leftrightarrow r_z(t) = -\frac{g}{2v_{0x}^2} r_x^2(t) + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} r_x(t)$$

et, comme nous exprimons r_z en fonction de r_x , on peut faire abstraction de la dépendance temporelle de ces deux variables (on élimine t entre les deux équations).

$$\Leftrightarrow r_z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} r_x^2 + r_x \tan \alpha$$

Cette équation est celle d'une parabole passant par l'origine et dont la concavité est tournée vers le bas et présentant un axe de symétrie verticale. Il est intéressant de remarquer que la norme v_0 de la vitesse initiale \vec{v}_0 et l'angle de lancement α sont suffisants pour déterminer entièrement le mouvement décrit par le mobile.

Il existe 3 cas particuliers à cette trajectoire, avec la condition initiale $t_0 = 0$ et $(r_{0x}, r_{0z}) = (0, 0)$.

Nous avons donc les équations suivantes

$$\begin{array}{ll} v_{0x} &= \|\vec{v}_0\| \cos \alpha & v_{0z} &= \|\vec{v}_0\| \sin \alpha \\ v_x(t) &= v_{0x} & v_z(t) &= -gt + v_{0z} \\ r_x(t) &= v_{0x}t & r_z(t) &= -g\frac{t^2}{2} + v_{0z}t \end{array}$$

Pour lesquelles nous allons faire varier le paramètre α selon les 3 cas particuliers :

1. $\alpha = 0$

On a les valeurs

$$\begin{array}{ll} \cos \alpha &= 1 & \sin \alpha &= 0 \\ v_{0x} &= v_0 & v_{0z} &= 0 \\ v_x(t) &= v_0 & v_z(t) &= -gt \\ r_x(t) &= v_0t & r_z(t) &= -g\frac{t^2}{2} \end{array}$$

2. $\alpha = \frac{\pi}{2}$

On a les valeurs

$$\begin{array}{ll} \cos \alpha &= 0 & \sin \alpha &= 1 \\ v_{0x} &= 0 & v_{0z} &= v_0 \\ v_x(t) &= 0 & v_z(t) &= -gt + v_0 \\ r_x(t) &= 0 & r_z(t) &= -g\frac{t^2}{2} + v_0t \end{array}$$

Ici, le mobile monte jusqu'à une hauteur r_z^{max} où la vitesse v_z s'annule. Ensuite, le mobile redescend. Le temps de montée t_m est le temps tel que la vitesse verticale $v_z(t)$ passe de $v_z(0) = v_{0z}$ à

$$v_z(t_m) = 0.$$

Le temps de montée t_m sera donc donné par

$$v_z(t_m) = -gt_m + v_0 \Leftrightarrow t_m = \frac{v_0}{g}$$

La hauteur $r_z^{max} = r_z(t_m)$ est obtenue en remplaçant t_m dans l'équation

$$\begin{aligned} r_z(t_m) &= -g \frac{v_0^2}{2g^2} + v_0 \frac{v_0}{g} \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned}$$

3. $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

On a les valeurs

$$\begin{array}{llll} \cos \alpha & = & 0 & \sin \alpha & = & -1 \\ v_{0x} & = & 0 & v_{0z} & = & -v_0 \\ v_x(t) & = & 0 & v_z(t) & = & -gt - v_0 \\ r_x(t) & = & 0 & r_z(t) & = & -g \frac{t^2}{2} - v_0 t \end{array}$$

Pour $t_0 \neq 0$ et $\vec{r}_0 \equiv (r_{0x}, r_{0z}) \neq (0, 0)$, nous aurions l'équation suivante, plus générale, qui s'obtient de la même manière :

$$\boxed{r_z - r_{0z} = -\frac{g}{2v_{0x}^2}(r_x - r_{0x})^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}(r_x - r_{0x})}$$

Qui est aussi l'équation d'une parabole, mais celle-ci passe par $\vec{r}_0 \equiv (r_{0x}, r_{0z})$ au lieu de l'origine $(0, 0)$ des axes. Par exemple, dans le problème du joueur de tennis frappant la balle avec sa raquette à une hauteur r_{0z} pour la renvoyer par dessus le filet, quel va être la trajectoire de la balle, si celle-ci a acquis une vitesse \vec{v}_0 suite au coup de raquette et que le tennisman se trouve à une distance r_{0x} du filet ?

Distance atteinte par le projectile : portée de tir

La distance atteinte par le projectile sera donnée par l'intersection de la parabole avec l'axe Ox . Autrement dit, la distance atteinte par le projectile sera donnée par les solutions r_x^{max} de l'équation $r_z - r_{0z} = -\frac{g}{2v_{0x}^2}(r_x - r_{0x})^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}(r_x - r_{0x})$ où on aura simplement une équation du 2^{eme} degré et où r_x^{max} est l'inconnue.

Avec la condition initiale $t_0 = 0$ et $(r_{0x}, r_{0z}) = (0, 0)$, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{g}{2v_{0x}^2}(r_x^{max})^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}r_x^{max} \\ \Leftrightarrow \frac{g}{2v_{0x}^2}(r_x^{max})^2 - \frac{v_{0z}}{v_{0x}}r_x^{max} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow r_x^{max} \left(\frac{g}{2v_{0x}^2} r_x^{max} - \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \right) = 0$$

Etant donné que nous avons défini l'angle α de lancement (ou de tir) comme

$$\tan \alpha = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\Leftrightarrow r_x^{max} \left(\frac{g}{2\|\vec{v}_0\|^2 \cos^2 \alpha} r_x^{max} - \tan \alpha \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow r_x^{max} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{g}{2\|\vec{v}_0\|^2 \cos^2 \alpha} r_x^{max} = \tan \alpha$$

La solution $r_x^{max} = 0$ correspond au « départ » du projectile, lorsque celui-ci quitte son origine. La solution $t_x^{max} > 0$ correspond à « l'arrivée » du projectile, lorsque celui-ci percute sa cible (qui est le sol, en général). Nous avons donc, pour cette deuxième solution :

$$\Leftrightarrow r_x^{max} = \frac{\tan \alpha \, 2\|\vec{v}_0\|^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{2\|\vec{v}_0\|^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$\Leftrightarrow r_x^{max} = \frac{\|\vec{v}_0\|^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Angle de tir correspondant à la portée maximale, dans le cas $(x_0, z_0) = (0, 0)$

Nous pouvons écrire $\tan \alpha = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}$. Dès lors, la distance atteinte par le projectile peut être vue comme une fonction dépendant du paramètre α . L'étude des extrema, via les dérivées, peut nous permettre de déduire l'angle α^{max} correspondant à la portée de tir maximum.

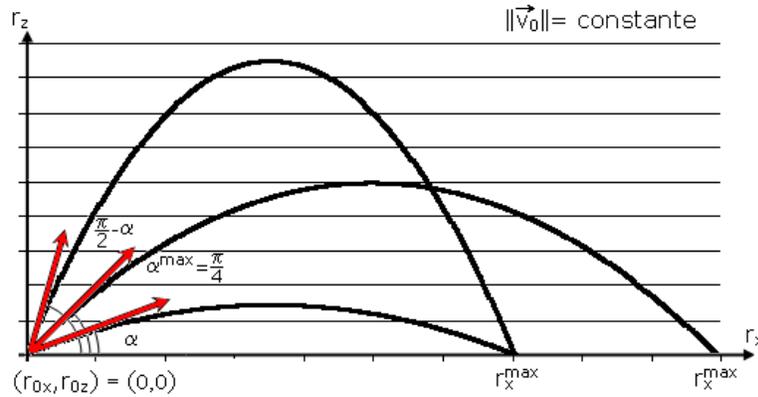


FIG. 8.15 – Parabole de tir : portée de tir r_x^{max} .

Cependant, il nous suffit de considérer que $r_x^{max} = \frac{\|\vec{v}_0\|^2 \sin 2\alpha}{g}$ et que les valeurs extrêmes d'un sinus oscillent entre -1 et 1 pour se dire que la valeur de r_x^{max} sera maximum si $\sin 2\alpha = 1$. Autrement dit, la portée de tir sera maximum (et égale à p) si $2\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, elle vaudra $p = \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{g}$.

Donc,

$$\alpha^{max} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad r_x^{max} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{g}$$

Hauteur maximum atteinte par le projectile

Pour déterminer la hauteur maximale atteinte par le projectile, il faudra tout d'abord définir après combien de temps sa vitesse verticale s'annule-t-elle? Autrement dit, il faudra déterminer à partir de quel instant le corps commence-t-il à descendre?

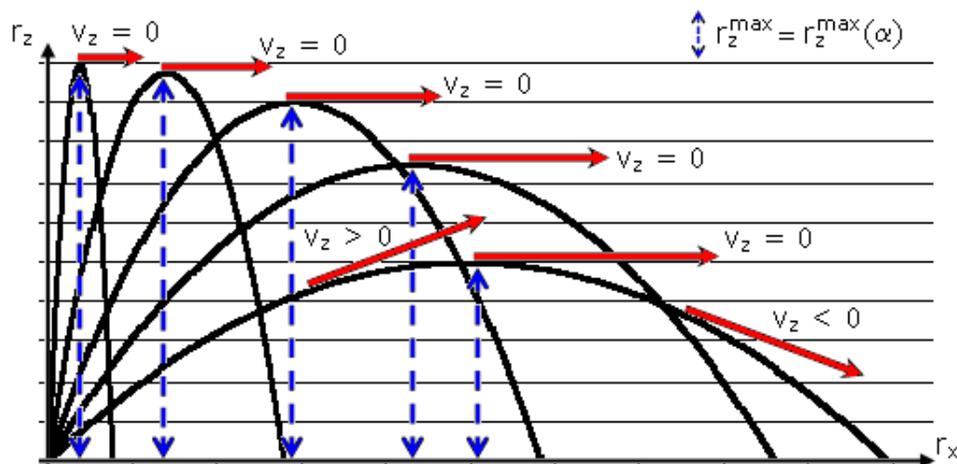


FIG. 8.16 – Parabole de tir : hauteur maximum atteinte par le projectile r_z^{max} .

On a l'équation de la vitesse $v_z(t) = -gt + v_{0z} = -gt + \|\vec{v}_0\| \sin \alpha$. Donc, nous pouvons écrire, t_m étant le temps mis par le mobile pour atteindre sa hauteur maximale,

$$v_z(t_m) = -gt_m + \|\vec{v}_0\| \sin \alpha \Leftrightarrow 0 = -gt_m + \|\vec{v}_0\| \sin \alpha$$

Donc, on a, comme temps de montée t_m ,

$$t_m = \frac{\|\vec{v}_0\| \sin \alpha}{g}$$

Nous pouvons dès lors remplacer t par sa valeur t_m dans l'équation de la trajectoire $r_z(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_{0z}t$ pour obtenir la hauteur maximale. Nous avons

$$r_z^{max} = r_z(t_m) = -g\frac{t_m^2}{2} + v_{0z}t_m$$

Remplaçons par ce que nous avons trouvé pour t_m :

$$\Leftrightarrow r_z(t_m) = -g\frac{\|\vec{v}_0\|^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} + \|\vec{v}_0\| \sin \alpha \frac{\|\vec{v}_0\| \sin \alpha}{g}$$

Donc, la hauteur maximale r_z^{max} vaut

$$r_z^{max} = \frac{\|\vec{v}_0\|^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

La hauteur maximale r_z^{max} que peut atteindre le projectile est fonction de l'angle de lancement α . Il nous suffit de considérer que $r_z^{max} = \frac{\|\vec{v}_0\|^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ et que les valeurs extrêmes d'un sinus au carré oscillent entre 0 et 1 pour se dire que la valeur de r_z^{max} sera maximum si $\sin^2 \alpha = 1$. Autrement dit, la hauteur atteinte par le projectile sera maximum si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (voir cas particulier n° 2). Dans ce cas, la hauteur atteinte par le projectile vaudra $h = \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{2g} = \frac{p}{2}$, où p est la portée maximale atteinte par le projectile (qui correspond à un angle de lancement $\alpha = \frac{\pi}{4}$).

Temps total mis pour parcourir la trajectoire

Le temps t_p mis par le projectile pour parcourir la trajectoire est égal au temps mis pour aller de l'abscisse de l'origine du tir r_{0x} à la portée de tir r_x^{max} .

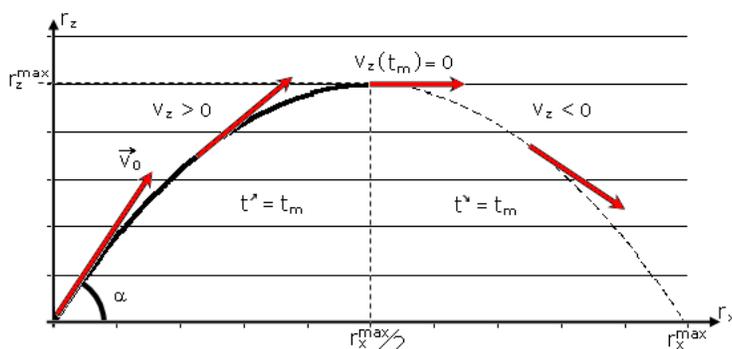


FIG. 8.17 – Parabole de tir : temps de parcours du projectile t_p .

Avec la condition initiale $t_0 = 0$ et $(r_{0x}, r_{0z}) = (0, 0)$, il vient

$$r_x(t) = v_{0x}t$$

et, comme

$$r_x^{max} = \frac{\|\vec{v}_0\|^2 \sin 2\alpha}{g}$$

on a le temps de parcours t_p

$$t_p = \frac{r_x^{max}}{v_{0x}} = \frac{\|\vec{v}_0\|^2 2 \sin \alpha \cos \alpha}{g \|\vec{v}_0\| \cos \alpha}$$

donc,

$$t_p = 2 \frac{\|\vec{v}_0\| \sin \alpha}{g} = 2t_m$$

le temps de parcours t_p vaut donc le double du temps de montée. Autrement dit, le temps de montée t_m est égal au « temps de descente ».

Remarquons que le temps de parcours t_p pourrait être obtenu en considérant l'équation $r_z(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_{0y}t$ pour laquelle on recherche le temps t_p tel que $r_z(t_p) = 0$.

Détermination de la vitesse instantannée du projectile

On s'intéresse cette fois à la vitesse instantannée du projectile en fonction de sa position (r_x, r_z) , non plus en fonction du temps t . Nous avons les équations paramétriques de la vitesse

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_z(t) = -g(t - t_0) + v_{0z} \end{cases}$$

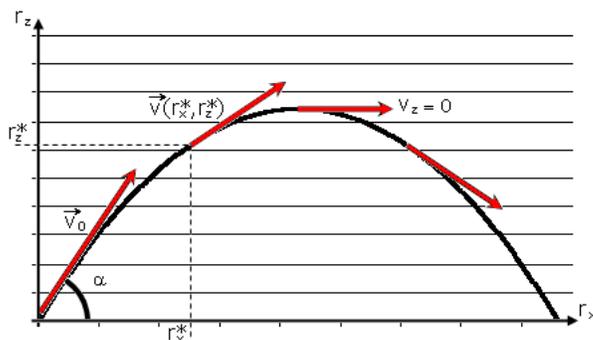


FIG. 8.18 – Parabole de tir : vitesse instantannée du projectile $\|\vec{v}(r_x, r_z)\|$.

Etant donné que

$$\begin{aligned} v^2(r_x, r_z) &= \|\vec{v}(r_x(t), r_z(t))\|^2 \\ &= v_x^2(t) + v_z^2(t) \\ &= v_{0x}^2 + (-g(t - t_0) + v_{0z})^2 \\ &= v_{0x}^2 + g^2(t - t_0)^2 + v_{0z}^2 - 2g(t - t_0)v_{0z} \\ &= v_{0x}^2 + v_{0z}^2 + g\left(\frac{2(t-t_0)^2}{2}\right) - 2v_{0z}(t - t_0) \\ &= \|\vec{v}_0\|^2 - 2g\left(-g\frac{(t-t_0)^2}{2} + v_{0z}(t - t_0)\right) \\ &= \|\vec{v}_0\|^2 - 2g(r_z(t)) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire

$$v(r_x, r_z) = \sqrt{\|\vec{v}_0\|^2 - 2g r_z}$$

Ce qui signifie, comme nous l'avons déjà constaté précédemment, que la norme de la vitesse ne dépend que de la hauteur r_z du projectile.

Parabole de sûreté

Si la norme de la vitesse initiale \vec{v}_0 est fixée, sous quel angle α doit-on lancer le projectile pour qu'il atteigne un point P de coordonnées (x, z) fixées ?

Nous allons donc résoudre l'équation de la position

$$r_z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} r_x^2 + r_x \tan \alpha$$

par rapport à l'angle α .

On a

$$\begin{aligned} r_z &= -\frac{g}{2v_0^2} r_x^2 (1 + \tan^2 \alpha) + r_x \tan \alpha \\ \Leftrightarrow r_z &= -\frac{g}{2v_0^2} r_x^2 \tan^2 \alpha + r_x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2} r_x^2 \\ \Leftrightarrow \frac{g}{2v_0^2} r_x^2 \tan^2 \alpha - r_x \tan \alpha + \left(\frac{g}{2v_0^2} r_x^2 + r_z\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{2g}{v_0^2} r_x^2 \tan^2 \alpha - r_x \tan \alpha + \left(\frac{1}{4} \frac{2g}{v_0^2} r_x^2 + r_z\right) &= 0 \end{aligned}$$

Avec la hauteur maximale $h = \frac{v_0^2}{g}$ atteinte par le projectile avec un angle de lancement $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on peut écrire, pour alléger les notations

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{r_x^2}{4h} \tan^2 \alpha - r_x \tan \alpha + \left(\frac{r_x^2}{4h} + r_z\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan^2 \alpha - \frac{4h}{r_x^2} r_x \tan \alpha + \frac{4h}{r_x^2} \left(\frac{r_x^2}{4h} + r_z\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow r_x^2 \tan^2 \alpha - 4h r_x \tan \alpha + (4hr_z + r_x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Nous allons chercher le discriminant Δ de cette équation du 2^{eme} degré en $\tan \alpha$

$$\Delta = (-4h r_x)^2 - 4r_x^2(4hr_z + r_x^2)$$

Donc,

$$\begin{aligned} (\tan \alpha)_{1,2} &= \frac{-(-4h r_x) \pm \sqrt{\Delta}}{2r_x^2} \\ &= \frac{4h r_x \pm \sqrt{4r_x^2(4h^2 - 4hr_z - r_x^2)}}{2r_x^2} \\ &= \frac{4h r_x \pm 2r_x \sqrt{4h^2 - 4hr_z - r_x^2}}{2r_x^2} \\ &= \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 4hr_z - r_x^2}}{r_x} \end{aligned}$$

Cette équation n'admettra de solution que si $4h^2 - 4hr_z - r_x^2 \geq 0$.

- Si $4h^2 - 4hr_z - r_x^2 > 0$, l'équation admet 2 solutions, c'est-à-dire qu'il existe 2 paraboles de tir passant par le point P de coordonnées (r_x, r_z) .
- Si $4h^2 - 4hr_z - r_x^2 = 0$, l'équation admet 1 seule solutions, c'est-à-dire qu'il existe 1 seule paraboles de tir passant par le point P de coordonnées (r_x, r_z) .
- Si $4h^2 - 4hr_z - r_x^2 < 0$, l'équation n'admet pas de solution, c'est-à-dire qu'on ne peut pas atteindre le point P de coordonnées (r_x, r_z) .

L'équation $4h^2 - 4hr_z - r_x^2 = 0$ peut encore s'écrire

$$\boxed{r_z = -\frac{r_x^2}{4h} + h}$$

Il s'agit donc de l'équation d'une parabole, dont la concavité est tournée vers le bas, d'axe de symétrie Oz et passant par les points $(0, h)$ et $(2h, 0) = (p, 0)$ (où p est la portée de tir maximum).

En conclusion, pour un point P fixé et une vitesse initiale de norme v_0 fixée,

- Si le point P se trouve sur cette parabole, on ne peut l'atteindre que d'une seule manière.
- Si le point P se trouve en dessous de cette parabole, on peut l'atteindre de 2 manières différentes.
- Si le point P se trouve au-dessus de cette parabole, on ne peut pas l'atteindre avec le projectile.

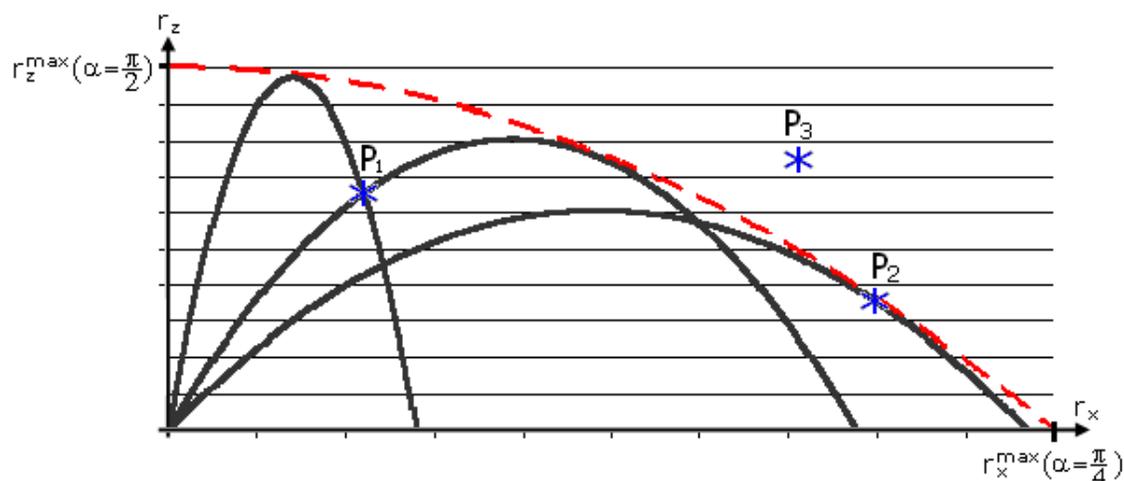


FIG. 8.19 – Parabole de tir : parabole de sûreté pour la norme de la vitesse de lancement $\|\vec{v}_0\|$ donnée. Le point P_1 peut être atteint de 2 façons. Le point P_2 peut être atteint d'une seule façon. Le point P_3 ne peut pas être atteint.

De plus, comme $h = \frac{v_0^2}{2g}$, la parabole de sûreté est déterminée par la seule norme de la vitesse initiale v_0 .

Précisions concernant la vitesse de lancement

Considérons le problème suivant :

Sous quelle vitesse v_0 faut-il lancer le projectile pour atteindre un point P de coordonnées (r_x, r_z) fixées, sachant que l'angle de lancement α est fixé lui aussi ?

On a l'équation du mouvement

$$\begin{aligned} r_z &= \frac{-g r_x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha r_x \\ \Leftrightarrow r_z - \tan \alpha r_x &= \frac{-g r_x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow v_0^2 &= \frac{-g r_x^2}{2(r_z - \tan \alpha r_x) \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

Donc,

$$v_0 = \sqrt{\frac{-g r_x^2}{2(r_z - \tan \alpha r_x) \cos^2 \alpha}}$$

Longueur d'un arc de courbe

Nous pouvons maintenant nous poser la question de la distance réelle parcourue par le projectile dans l'espace, c'est-à-dire la longueur de l'arc de parabole, qui sera certainement supérieure à la portée de tir

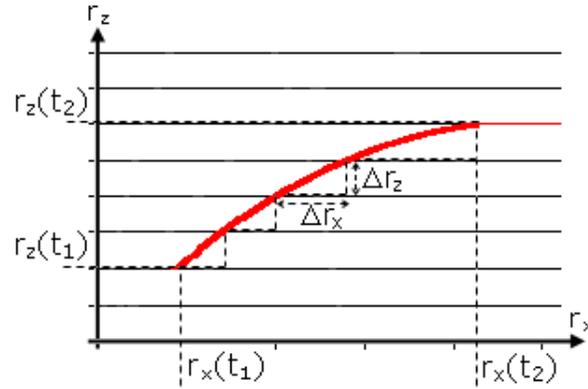


FIG. 8.20 – Longueur $s(t_1, t_2)$ d'un arc de courbe entre les points $(r_x(t_1), r_z(t_1))$ et $(r_x(t_2), r_z(t_2))$. La longueur de l'arc est approximée en considérant la somme des petites longueurs $\Delta r = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_z^2}$.

r_x^{max} .

Si $\vec{r} = \vec{r}(t)$, donc si le vecteur position dépend du temps, alors la norme du vecteur $d\vec{r} = \lim_{t' \rightarrow t} \vec{r}(t) - \vec{r}(t')$ vaut

$$dr = \|d\vec{r}\| = \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt \right\|$$

Soit $s(t_1, t_2)$ la distance parcourue par le mobile sur l'arc de courbe entre les instants t_1 et t_2 . On a

$$s(t_1, t_2) = \int_{r_1}^{r_2} dr$$

Donc,

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{v}(t)\| dt$$

Or, comme $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)}$, on a

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{r}_x^2 + \dot{r}_z^2} dt$$

Finalement, étant donné que $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$,

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dr_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_z}{dt}\right)^2} dt$$

Nous pouvons tenter de résoudre cette intégrale dans le cas de la parabole de tir, car nous avons que, avec $t_0 = 0$, $r_{0x} = 0$ et $r_{0z} = 0$,

$$\begin{cases} v_x(t) &= v_{0x} \\ v_z(t) &= -gt + v_{0z} \end{cases}$$

Donc, pour les curieux (ou les masochistes), l'intégrale se résout comme suit :

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v_{0x}^2 + (-gt + v_{0z})^2} dt$$

Posons $-gt + v_{0z} = u$. Donc, comme $du = -dt$, on a, avec $u_1 = u(t_1)$ et $u_2 = u(t_2)$,

$$\begin{aligned} s(t_1, t_2) &= -\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{v_{0x}^2 + u^2} du \\ &= -v_{0x} \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + \frac{u^2}{v_{0x}^2}} du \end{aligned}$$

Posons $\frac{u}{v_{0x}} = \tan \phi$. Donc, comme $du = \frac{v_{0x}}{\cos^2 \phi} d\phi$, on a, avec $\phi_1 = \arctan \frac{u(t_1)}{v_{0x}}$ et $\phi_2 = \arctan \frac{u(t_2)}{v_{0x}}$,

$$\begin{aligned} s(t_1, t_2) &= -v_{0x} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{1 + \tan^2 \phi} \frac{v_{0x}}{\cos^2 \phi} d\phi \\ &= -v_{0x}^2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{1}{\cos^2 \phi}} d\phi \end{aligned}$$

Nous allons traiter la valeur absolue du cosinus en utilisant le signe \pm que nous allons placer devant l'intégrale. Nous verrons plus loin qu'à partir du moment où l'on considère la solution physique de cette intégrale, il suffira de choisir la solution correspondant à une distance parcourue positive.

$$\begin{aligned} s(t_1, t_2) &= -v_{0x}^2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{|\cos \phi| \cos^2 \phi} d\phi \\ &= \mp v_{0x}^2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{\cos^3 \phi} d\phi \\ &= \mp v_{0x}^2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos \phi}{\cos^4 \phi} d\phi \\ &= \mp v_{0x}^2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos \phi}{(1 - \sin^2 \phi)^2} d\phi \end{aligned}$$

Posons $\sin \phi = \tau$. Donc, comme $d\tau = \cos \phi d\phi$, on a, avec $\tau_1 = \arcsin \phi_1$ et $\tau_2 = \arcsin \phi_2$,

$$\begin{aligned} s(t_1, t_2) &= \mp v_{0x}^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{(1 - \tau^2)^2} d\tau \\ &= \mp v_{0x}^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{(1 - \tau)^2 (1 + \tau)^2} d\tau \\ &= \mp v_{0x}^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{1}{2(1 - \tau)^2} + \frac{1}{2(1 + \tau)^2} \right) d\tau \\ &= \mp v_{0x}^2 \left(\left[\frac{1}{2(1 - \tau)} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} + \left[-\frac{1}{2(1 + \tau)} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \right) \\ &= \mp \frac{v_{0x}^2}{2} \left(\frac{1}{1 - \tau_2} - \frac{1}{1 - \tau_1} + \frac{1}{1 + \tau_1} - \frac{1}{1 + \tau_2} \right) \end{aligned}$$

La longueur de l'arc de parabole ne peut pas être négatif, puisqu'il s'agit d'une distance parcourue et non plus d'un déplacement dans une direction donnée. Nous retiendrons donc la solution qui nous donne une distance positive. (À vérifier)

8.3 Applications de la cinématique

Les forces de police s'intéressent en général uniquement à la vitesse et disposent de cinémomètres à effet Doppler, improprement appelés « radars ». Ceux-ci permettent de mesurer directement la vitesse instantanée. Lorsque s'est produit un accident, les traces de freinage, et les éventuelles traces d'impact sur le mobilier urbain ou les rails de sécurité, permettent de recomposer la trajectoire des véhicules. Notamment, la longueur des traces de freinage permet d'estimer la vitesse avant le début du freinage.

Le conducteur, quant à lui, dispose d'un tachymètre (indicateur de vitesse) sur son tableau de bord, qui lui permet de connaître également sa vitesse instantanée. Il se base en général sur la fréquence de

rotation des roues. Par exemple, une pastille réfléchissante est collée sur l'arbre de transmission, et une cellule photo-déetectrice permet de connaître le temps qui s'écoule entre deux passages de la pastille, donc la fréquence de rotation de la roue, donc la vitesse.

Les cyclistes mettent un aimant sur un rayon de la roue avant et un détecteur magnétique sur la fourche, ce qui leur permet, de la même manière, de mesurer la vitesse et le chemin parcouru. D'anciens systèmes étaient basés sur une petite roue tournant, entraînée par la roue du vélo.

Les marcheurs disposent de podomètres qui détectent les vibrations caractéristiques du pas. Le marcheur ayant rentré la longueur moyenne de son pas, l'appareil peut déterminer la distance parcourue ainsi que la vitesse (produit de la longueur du pas par la fréquence de pas).

La vidéo couplée à l'analyse informatisée des images permet également de déterminer la position et la vitesse des véhicules. Ceci est utilisé pour estimer le trafic et détecter les embouteillages, et pourrait faire son apparition dans les véhicules dans un avenir proche, afin de fournir une aide à la conduite (par exemple évaluation des distances de sécurité en fonction de la vitesse, détection de trajectoires anormales et de freinage d'urgence).

La navigation au long cours fut rendue possible grâce au développement des horloges. En effet, elle utilisait la position des astres, or celle-ci varie avec l'heure. Connaissant la date et l'heure, et muni d'un éphéméride (relevé des positions des étoiles selon la date et l'heure), les astres jouaient alors le rôle de repères côtiers.

La boussole permet de déterminer le cap que l'on suit, et pour un navire, la vitesse peut être estimée par la vitesse du vent et les courants. Ceci permet d'anticiper la trajectoire.

Pour se repérer, les aviateurs et marins naviguant aux instruments disposent des signaux émis par des satellites (système GPS) ou des balises radio au sol. Des satellites émettent des signaux synchronisés, et le décalage entre la réception des signaux permet de déterminer la position sur le globe terrestre. Ces systèmes sont également accessibles aux véhicules terrestres et aux piétons. Pour le décollage et l'atterrissage, les avions disposent de balises radio posées au sol leur donnant un repérage précis par rapport à la piste, permettant des manoeuvres sans visibilité (de nuit ou par mauvais temps).

Les systèmes de surveillance aérienne (tour de contrôle, aviation civile, armée) ou nautique, ainsi que certains avions et navires, sont munis de radars. Ces dispositifs émettent une impulsion radio dans toutes les directions (en général avec une antenne tournante). Une impulsion revient si elle rencontre un obstacle ; le temps qu'elle met à revenir permet de déterminer la distance de l'obstacle, et le décalage en fréquence permet de déterminer la vitesse de l'obstacle (effet Doppler).

Chapitre 9

Statique

La statique sera envisagée dans le cadre de la mécanique du solide indéformable. La mécanique du solide est la partie de la mécanique qui s'intéresse aux objets que l'on ne peut réduire en un point matériel. Cela permet notamment de décrire et modéliser les rotations de l'objet sur lui-même.

L'objet est lui-même composé de points matériels, que ce soit des points discrets, par exemple un assemblage de boules reliées par des baguettes de masse négligeable, chaque boule pouvant être modélisée par un point matériel, ou un ensemble continu de points. En général, on suppose le solide indéformable. La déformation du solide relève de la mécanique des milieux continus. On appellera solide indéformable un ensemble de points tels que pris deux à deux, leur distance ne varie pas au cours du temps.

La mécanique du solide est donc une branche de la mécanique traitant du comportement des mécanismes constitués de pièces rigides en général, et parfois déformables. L'objectif principal étant la détermination des performances d'un système en vue d'établir un dimensionnement adapté à l'usage envisagé, ou la validation de ces grandeurs.



FIG. 9.1 – Illustration d'une des applications de la statique : l'effet du levier

La statique nous permettra d'identifier les conditions d'équilibre d'un corps solide massif, sans in-

roduire de notion d'évolution dans le temps. L'équilibre traduit l'immobilité, c'est à dire l'absence de mouvement.

La statique, ou mécanique statique, est donc la branche de la physique qui étudie les systèmes mécaniques au repos (dans un repère galiléen).

9.1 Degrés de liberté

Les simplifications de la mécanique du point reposent sur le fait que le point est invariant par rotation, et que toutes les forces sont appliquées au point matériel. Alors les forces suffisent à modifier sa position. Pour les solides, constitués d'une infinité de points matériels, les déplacements possibles, appelés aussi degrés de liberté, sont de deux natures : translations (3 directions principales) et rotations (autour de ces trois directions). Alors que les translations ne peuvent être provoquées que par des forces, les rotations sont générées par des moments de ces forces, ou autres couples de force. Quand l'équilibre d'un point ne nécessite l'établissement que de 3 relations algébriques (équation vectorielle des forces à 3 dimensions), celui du solide demande alors la considération de 3 équations supplémentaires (équation vectorielle des moments). Le principe fondamental de la statique se compose alors :

1. du théorème de la résultante nulle (somme des forces nulle).
2. du théorème du moment nul (somme des moments nulle).

L'étude de l'équilibre d'un solide nécessite toujours la considération de ces 2 théorèmes, même si certains cas simples, traités en mécanique du point, semblent être résolus avec une seule des 2 parties. En règle générale, il n'est pas possible de traiter séparément les deux aspects (forces et moments). Il s'agit d'un problème à 6 dimensions (6 équations à 6 inconnues).

Lors de l'étude d'un corps dans un espace en trois dimensions, celui-ci peut effectuer divers déplacements. Si nous dotons cet espace d'un système d'axes orthonormés x , y et z , le corps pourrait se déplacer dans la direction x (avant-arrière), y (gauche-droite), z (haut-bas) ou une combinaison des trois directions. Le corps pourrait aussi tourner autour de lui-même selon des axes parallèles à x , y , z ou une combinaison des trois. Le corps possède donc 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations).

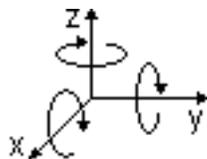


FIG. 9.2 – Illustration des 6 degrés de liberté dans un espace à 3 dimensions

Dans de nombreux problèmes, les forces impliquées sont coplanaires. C'est à dire qu'il existe un plan Oxy dans lequel on peut observer ces forces. Dans ce cas les solides étudiés sont aussi considérés comme des prisonniers de ce plan. Leurs degrés de liberté sont alors au nombre de 3 :

- translation suivant la direction x.
- translation suivant la direction y.
- rotation autour de la direction z.

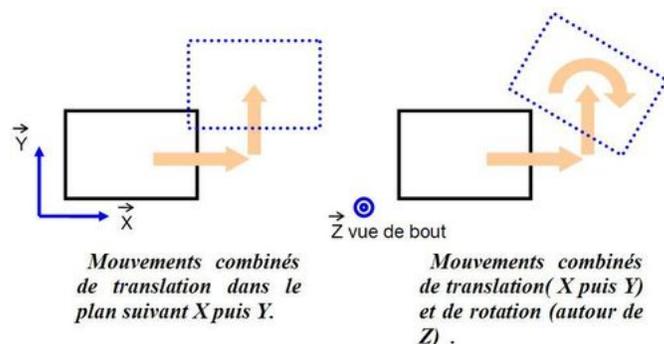


FIG. 9.3 – Mouvement plan d'un corps rectangulaire : composition de translations et rotations

Lors de certains problèmes statiques, nous utiliserons deux notations spécifiques pour illustrer le type de liaison employé entre le corps ou la structure étudiée et son support : le rouleau et la charnière. (voir schéma 9.4)

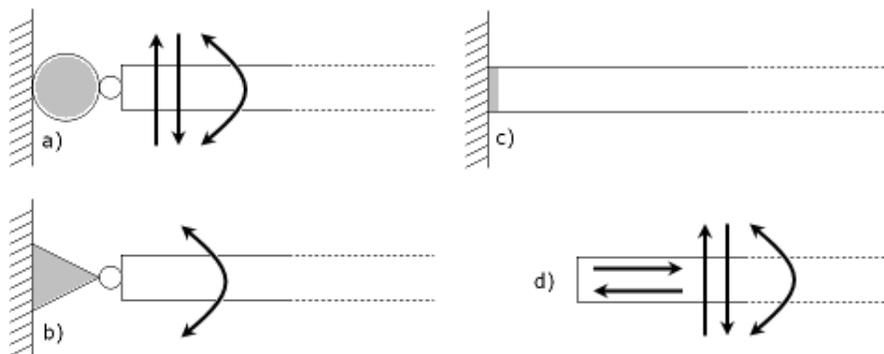


FIG. 9.4 – a) Rouleau : 1 translation et 1 rotation (2 degrés de liberté). b) Charnière : 1 rotation (1 degré de liberté). c) Liaison fixe : aucun mouvement possible (0 degrés de liberté). d) pas de liaison : 2 translations et 1 rotation (3 degrés de liberté).

En accord avec les deux théorèmes, le corps sera considéré en équilibre statique si, globalement, il ne subit ni translation, ni rotation.

9.2 Moments de forces, bras de leviers

La force est un modèle (sous la forme d'un vecteur) qui sert à représenter les interactions indépendamment de leur cause (poids, traction d'un câble, force électrostatique ou magnétique, ...). La manière

la plus simple de la représenter est de considérer la traction par un câble. En effet, le vecteur force est nécessairement dans la direction du câble et dans le sens de la traction, son point d'application est le point d'attache du câble à l'objet.

Si par exemple on considère un objet relié à trois câbles et non soumis à son poids (l'expérience se déroule dans la navette spatiale, en état d'apesanteur), la condition d'équilibre est très simple. Si \vec{F}_1 , \vec{F}_2 et \vec{F}_3 sont les forces qu'exercent les câbles sur l'objet, alors

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

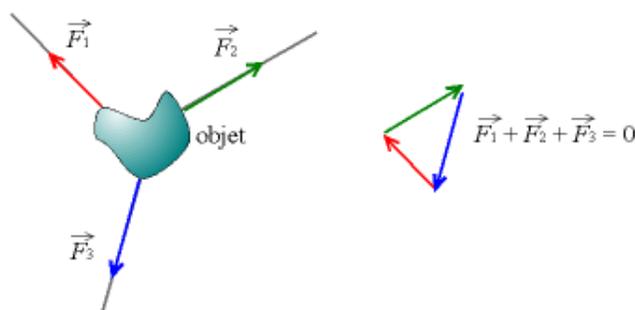


FIG. 9.5 – Equilibre des forces qu'exercent les câbles sur l'objet.

Le poids est une action mécanique qui s'exerce en tout point de l'objet. On peut la résumer en une force unique notée \vec{P} s'appliquant au centre d'inertie G de l'objet. En fait, on peut représenter l'action du poids par celle d'un câble attaché au « centre » de l'objet et tirant vers le bas.

Dans le modèle de la gravité de Newton, le poids est obtenu en multipliant la masse m de l'objet par l'accélération \vec{g} de la gravité, c'est-à-dire l'accélération qu'ont tous les objets en chute libre si l'on néglige la résistance de l'air (dans le vide, tous les objets tombent avec la même accélération quelles que soient leur forme et leur masse). On a

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

Si l'on a un objet immobile suspendu à un fil, alors la somme vectorielle de la traction \vec{T} du fil et du poids de l'objet est nulle

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \text{ soit } \vec{T} = -\vec{P}$$

Si un objet est posé immobile sur un support, une table, il est soutenu par ce support. Le support exerce donc sur l'objet une force qui compense exactement le poids. Cette force est appelée réaction du support et est notée \vec{R} . Cette force résulte de la somme de toutes les forces exercées en chaque point de contact entre l'objet et le support, mais elle peut se résumer en une force unique dont le point d'application est exactement sous le barycentre (le « milieu » pondéré) de l'objet. Le point d'application de la réaction n'est donc pas nécessairement sur la surface de contact, par exemple dans le cas des tabourets ou des véhicules à roues.

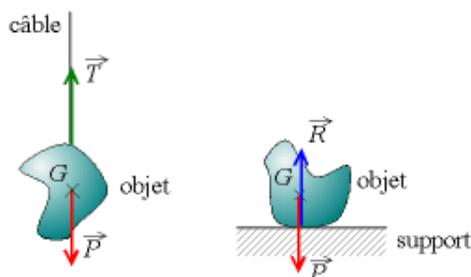


FIG. 9.6 – Equilibre des forces : exemples de la masse suspendue à un câble (à gauche) et de la masse posée sur un support (à droite)

Dans ce cas simple, on a

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \text{ soit } \vec{P} = -\vec{R}$$

Principe de l'action et de la réaction

Lorsqu'un objet A exerce une force (appelée « action ») sur un objet B , l'objet B exerce une force opposée (appelée « réaction ») sur l'objet A . Ce principe est également appelé « troisième loi de Newton ».

Ainsi, dans le cas d'un objet suspendu à un câble, le câble exerce une traction sur l'objet, donc l'objet exerce aussi une traction sur le câble (c'est pour cela qu'il est tendu). Dans le cas d'un objet posé sur un support, le support exerce une force sur l'objet (la réaction du support), donc l'objet exerce lui aussi une force sur le support (la pression de l'objet).

On voit qu'un des éléments fondamentaux est de bien définir le système sur lequel on travaille. On considère les forces qu'exercent les éléments extérieurs au système sur le système lui-même. Ainsi, dans le cas de l'objet suspendu au câble, on peut choisir comme système :

- l'objet, soumis à son poids \vec{P} et à la traction du câble \vec{T}_1
- ou bien le câble, soumis à la traction \vec{T}_2 de la part de l'objet et à la réaction \vec{R} du support (le plafond auquel il est accroché).
- mais encore l'ensemble (câble et objet) soumis au poids \vec{P} de l'objet et la réaction \vec{R} du support. On considère alors, comme dans les cas précédents, que le poids du câble est nul ou négligeable devant les autres forces.

D'après le principe de l'action et de la réaction, on en déduit que

$$\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$$

Les conditions d'équilibre s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T}_1 &= \vec{0} && \text{pour l'objet} \\ \vec{T}_2 + \vec{R} &= \vec{0} && \text{pour le câble} \end{aligned}$$

Soit au final

$$\vec{R} = -\vec{P}$$

On voit donc que le câble transmet intégralement les efforts, pour le plafond, tout est comme si le solide était attaché sans intermédiaire.

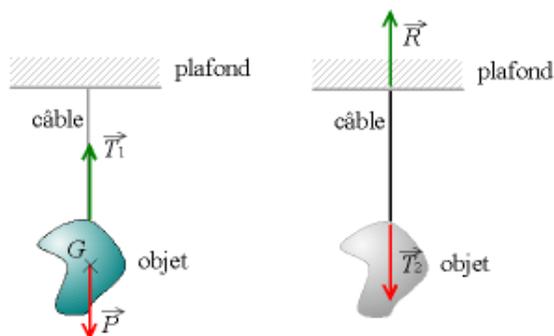


FIG. 9.7 – Transmission des efforts du câble vers le plafond.

Réaction du support et frottement statique

Dans de nombreux problèmes simples, la réaction du support est perpendiculaire à la surface de celui-ci. Ceci n'est en fait vrai que pour un objet immobile sur une surface sans frottement. Ainsi, par exemple, supposons un objet posé sur un plan incliné parfaitement glissant (ou bien une boule pouvant rouler sans frottement) et retenu par un câble, alors la réaction du support est bien perpendiculaire à celui-ci.

Mais le cas est différent dans le cas d'un objet immobile sur un plan incliné, sans câble, retenu uniquement par frottement. La réaction \vec{R} du support compense alors seul le poids. Dans ce cas-là, on peut décomposer la réaction en une composante \vec{R}_n perpendiculaire au support, et une composante \vec{R}_f parallèle au support. \vec{R}_f est appelée force de frottement statique.

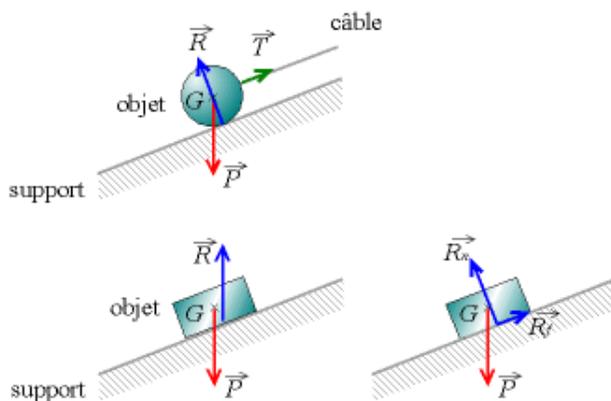


FIG. 9.8 – Équilibre des forces : réaction du support sans frottement (en haut) et avec frottement statique (en bas).

Nous présentons ci-dessous un autre cas où la réaction n'est pas perpendiculaire au support.

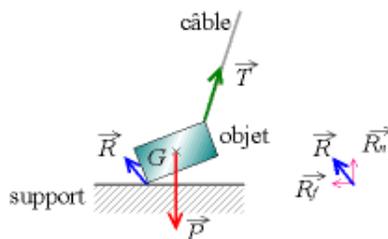


FIG. 9.9 – Exemple de réaction du support non perpendiculaire à la surface. La réaction R se décompose en une composante normale R_n et une composante frottement statique R_f .

L'intensité de la force de frottement est déterminée par le loi de Coulomb.

9.2.1 Moment de force

Prenez une planche en équilibre au bord d'un muret. Pour la déséquilibrer on peut poser une charge sur la partie en porte-à-faux. La capacité de cette charge à faire basculer la planche n'est pas la même suivant qu'elle est posée près du muret ou au bout de la planche. De même, on peut au même endroit, placer une charge plus grosse et constater la différence de comportement.

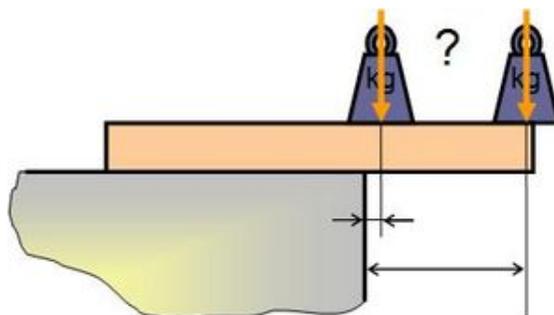


FIG. 9.10 – Schéma d'introduction à la notion de moment de force.

Le pouvoir de basculement dépend donc de l'intensité de la force, mais aussi de la position relative du point d'application et du point de rotation réel ou virtuel considéré.

Ces distinctions sont représentables par le modèle de moment d'une force qui est l'aptitude d'une force à faire tourner un système mécanique autour d'un point donné, qu'on nommera aussi pivot.

Le moment d'une force \vec{F} s'exerçant au point A par rapport au pivot P , est le vecteur noté

$$\vec{M}_{\vec{F}/P} = \vec{PA} \times \vec{F} = \vec{F} \times \vec{AP}$$

où \times désigne le produit vectoriel.

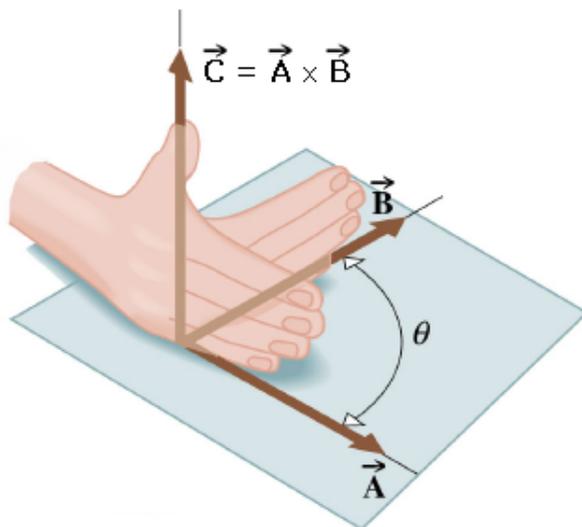


FIG. 9.11 – Produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$ des vecteurs \vec{A} et \vec{B} .

Ce vecteur est perpendiculaire au plan contenant ces deux vecteurs. De plus, sa norme vaut

$$\|\vec{M}_{\vec{F}/P}\| = \|\vec{F}\| \|\vec{AP}\| \sin \alpha$$

où α est l'angle formé par les vecteurs \vec{F} et \vec{AP} .

Si d est la distance orthogonale du pivot P à la droite de glissement de \vec{F} , alors sa norme vaut :

$$\|\vec{M}_{\vec{F}/P}\| = \|\vec{F}\| d$$

La longueur d est appelée « bras de levier ».

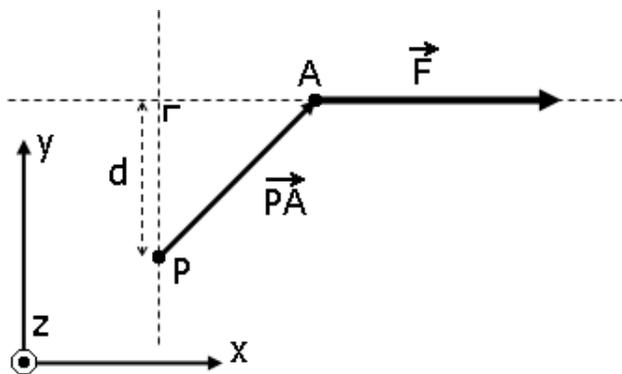


FIG. 9.12 – Le bras de levier d est la distance qui sépare la droite de glissement de la force appliquée \vec{F} au pivot P .

Les composantes et la norme d'un moment de force sont exprimées en Newton-mètres (Nm), dans le

système international d'unités.

Cas du moment nul

Puisqu'il s'agit ensuite d'établir la somme nulle des moments, on peut naturellement s'intéresser aux cas de nullité individuelle des moments de force. De par les propriétés du produit vectoriel, on a un moment nul dans plusieurs cas.

- Si la force \vec{F} est nulle.
- Si le vecteur \vec{AP} est nul ($\vec{0}$). La force est donc appliquée en P.
- Si \vec{F} et \vec{AP} sont colinéaires. Alors la droite de glissement de \vec{F} passe par P, ce qui inclut aussi le cas précédent.

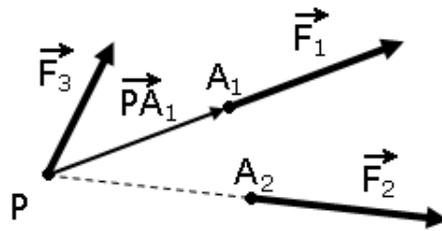


FIG. 9.13 – 3 cas où le moment est nul. Dans les deux premiers cas (\vec{F}_1 et \vec{F}_2), les forces sont colinéaires avec respectivement les vecteurs \vec{PA}_1 et \vec{PA}_2 . Dans le troisième cas (\vec{F}_3), le vecteur \vec{AP} est nul.

9.2.2 Couple

Si on considère deux forces opposées \vec{F} appliquée en A et $-\vec{F}$ appliquée en B, points distincts d'un même système, il est évident que leur somme est nulle. Qu'en est-il de la somme de leur moment en un point P de l'espace ?

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{\vec{F}/P} + \vec{M}_{-\vec{F}/P} &= \vec{PA} \times \vec{F} + \vec{PB} \times (-\vec{F}) \\
 &= \vec{PA} \wedge \vec{F} + \vec{BP} \times \vec{F} \\
 &= (\vec{BP} + \vec{PA}) \times \vec{F} \\
 &= \vec{BA} \times \vec{F}
 \end{aligned}$$

On remarque que le résultat est indépendant du point de pivot P considéré. On a

$$\vec{M}_{\vec{F}/P} + \vec{M}_{-\vec{F}/P} = \vec{C}$$

Cette quantité \vec{C} est appelée « couple ». Il n'est pas besoin de préciser le point de rotation. Les deux forces constituent alors un couple de forces.

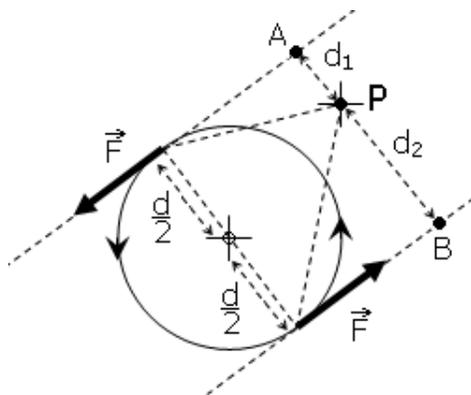


FIG. 9.14 – Couple de forces : $\|\vec{C}\| = \|\vec{F}\| d_1 + \|\vec{F}\| d_2 = \|\vec{F}\| (d_1 + d_2) = \|\vec{F}\| d$. Le couple de forces est indépendant du pivot P considéré.

Outre les autres cas évidents, le couple est nul lorsque les deux forces ont la même droite d'action. Le couple augmente avec l'intensité commune des forces, mais aussi avec l'éloignement des points. Il est optimal lorsque \vec{AB} et \vec{F} sont orthogonaux.

En réalité le couple n'existe pas intrinsèquement. Il est toujours associé à un ensemble de forces s'annulant vectoriellement mais dont les moments s'ajoutent sans s'annuler. C'est par exemple le résultat de l'action du vent sur une éolienne, ou l'action des forces électromagnétiques sur l'induit d'un moteur électrique.

On ne doit donc pas faire le raccourci « somme des moments = moment de la somme ». Cela n'est vrai que pour un ensemble de forces appliquées au même point. Cela montre enfin qu'une action mécanique n'est pas représentable par un seul vecteur force. La considération du point d'application est primordiale.

9.2.3 Levier et avantage mécanique

Un levier est une barre rigide pivotant autour d'un point fixe. Le pivot peut être situé à une extrémité, au milieu, ou bien à n'importe quel endroit du levier. Le levier permet de démultiplier la force, par exemple pour soulever un objet lourd avec une force réduite.

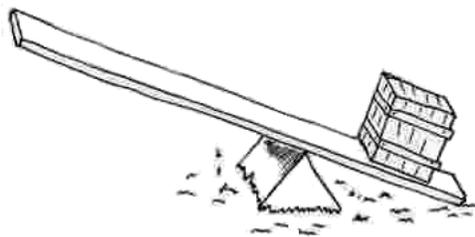


FIG. 9.15 – Illustration du principe du levier.

Notons qu'il ne s'agit plus vraiment là de mécanique du point puisque l'on étudie la rotation d'un objet, le levier, que l'on ne peut réduire à un point (d'ailleurs, la rotation d'un point n'a pas de sens). C'est l'équilibre de l'objet placé au bout du levier qui nous intéresse, mais ceci nécessite de s'intéresser au levier en lui-même.

Supposons le cas où l'on veut lever un objet. Le levier est soumis à trois forces :

- l'action \vec{F}_1 de l'objet (qui est égale à son poids)
- l'action \vec{F}_2 de la personne sur le levier
- l'action \vec{R} du pivot sur le levier.

À l'équilibre, la somme des trois forces s'annulent,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} = \vec{0}$$

Mais cela ne suffit pas à étudier le problème. On ne sait pas quelle est la répartition des forces entre l'action du pivot et l'action de la personne. Introduisons pour cela la notion de moment par rapport au pivot.

Le moment d'une force \vec{F} s'exerçant au point A par rapport au pivot P est le vecteur $\vec{M}_{\vec{F}/P}$ dont la norme vaut

$$\|\vec{M}_{\vec{F}/P}\| = \|\vec{F}\| \cdot d$$

où d est la distance du pivot à la droite de glissement du vecteur force \vec{F} . Le moment est positif si la force tend à créer une rotation dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre). La longueur d est appelée bras de levier.

Plus simplement, on peut considérer le moment d'une force par rapport à un point comme son aptitude à faire tourner autour du point considéré le corps sur lequel elle s'exerce. Cette aptitude augmente avec l'intensité de la force (si on pousse plus fort), et avec la distance observée (si on pousse de plus loin).

On peut à l'aide de cette notion énoncer une loi de l'équilibre en rotation :

Un objet est en équilibre de rotation par rapport à un pivot si la somme des moments des forces par rapport à ce pivot est nulle.

On a donc maintenant une deuxième équation qui va permettre de déterminer \vec{F}_1 et \vec{F}_2 :

$$\vec{M}_{\vec{F}_1/P} + \vec{M}_{\vec{F}_2/P} + \vec{M}_{\vec{R}/P} = \vec{0}$$

On peut déjà dire que $\vec{M}_{\vec{R}/P} = \vec{0}$ car l'action \vec{R} se fait sur le pivot P . On a donc

$$\vec{M}_{\vec{F}_1/P} + \vec{M}_{\vec{F}_2/P} = \vec{0}$$

Si d_1 est le bras de levier de \vec{F}_1 et d_2 le bras de levier de \vec{F}_2 , alors on a

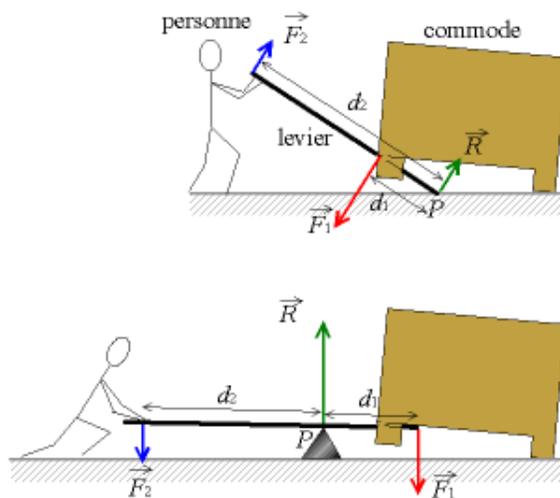


FIG. 9.16 – Deux méthodes pour soulever une commode avec un levier.

$$\|\vec{F}_1\| d_1 = \|\vec{F}_2\| d_2$$

donc si $d_2 > d_1$, alors $\|\vec{F}_1\| > \|\vec{F}_2\|$. On voit donc que si le bras de levier est plus long du côté de la personne que du côté de l'objet, la personne devra faire un effort réduit pour maintenir l'équilibre (c'est-à-dire concrètement pour soulever l'objet). La force exercée par le pivot sur le levier participe à soulever l'objet. Dans le cas contraire, l'objet sera plus difficile à soulever qu'à la main directement. L'image ci-dessous montre deux manières de soulever une commode en s'aidant d'un levier : en prenant appui sur le sol (figure du haut, le pivot est à l'extrémité du levier) ou bien sur un objet intermédiaire (figure du bas, le pivot est situé sur le levier).

Les balances à masse coulissante utilisent ce principe pour peser.

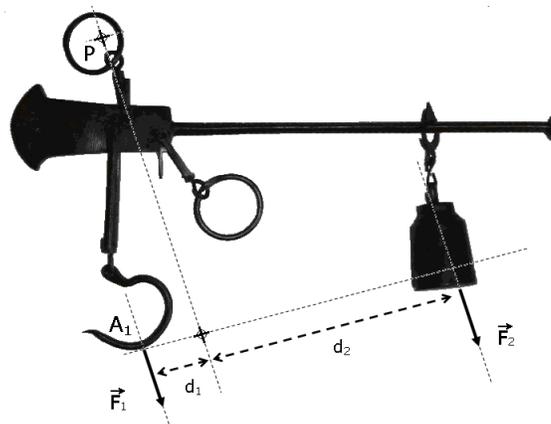


FIG. 9.17 – balance « romaine » (à masse coulissante)

Dans cette balance, les deux bras du fléau n'ont pas la même longueur. Le bras du côté de la masse

inconnue a une longueur constante alors que la longueur du bras qui supporte le contre-poids est variable. Dans cette balance, on n'obtient pas l'équilibre en égalisant les deux masses, mais en agissant sur la longueur du bras qui porte le contre-poids. L'équilibre se fait lorsqu'en déplaçant ce contre-poids le long de sa tige, le fléau atteint la position horizontale. Le bras le plus long porte des divisions avec indication des poids correspondants. Il suffit alors de lire le poids de l'objet.

La balance ordinaire se compose d'une barre métallique rigide appelée « fléau » traversée en son milieu perpendiculairement à sa longueur par un prisme d'acier appelés « couteau central ». Ce prisme repose par une de ses arêtes sur deux petits plans d'acier fixés à l'extrémité d'une colonne qui, par suite, soutient le fléau. Les deux extrémités du fléau servent à supporter : l'un, le corps à peser, l'autre les poids marqués destinés à faire équilibre au corps.

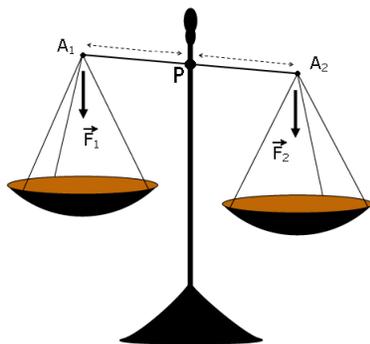


FIG. 9.18 – balance « classique » (à fléau)

Notez bien qu'il faut que les moments soient tous calculés par rapport au même pivot. Par exemple, si l'on a deux leviers agissant l'un sur l'autre mais pivotant chacun sur un point différent, on ne peut pas écrire l'égalité des moments au point de contact.

Poulie

On peut faire changer cette force de direction à l'aide d'une poulie. La poulie est en soi un objet qui est soumis à des forces ; si elle est à l'équilibre (elle ne bouge pas, ne tourne pas), alors la somme des forces est nécessairement nulle, et la somme de leurs moments est elle aussi nulle.

Dans le cas d'une poulie de renvoi (la poulie est fixée à un objet fixe dans le référentiel, comme un mur ou un plafond), le câble passe dans la gorge de la poulie ; l'équilibre des moments implique que la force qui s'exerce sur chaque brin du câble est la même. La poulie change donc la direction de la force dans le câble (via la réaction du support de la poulie), mais pas son intensité.

Dans le cas d'une poulie renversée, mobile, le câble est fixé à un objet immobile dans le référentiel (par exemple plafond). L'action du support sur le câble s'ajoute à l'action de l'opérateur sur le câble, le poids de la poulie et de sa charge est donc pris en charge en partie par le support. C'est aussi le principe

du cabestan. En fait la charge est équitablement répartie sur l'ensemble des fils soutenant la poulie.

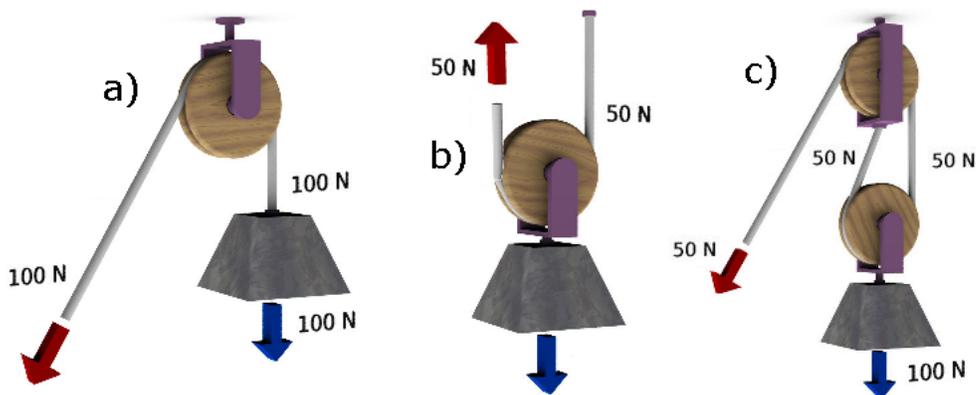


FIG. 9.19 – a) Poulie simple fixe : la force change de sens. b) Poulie simple mobile : la force transmise est divisée par 2. c) Poulies composées : la force transmise est divisée par deux et change de sens.

Dans le cas d'une poulie à double gorge, on a deux câbles qui passent chacun par une gorge ayant un diamètre différent. On se retrouve dans la même configuration que le levier.

9.3 Equilibre statique

9.3.1 Résultante des forces

On appelle point matériel un objet idéal de dimensions nulles (assimilable à un point) mais doté d'une masse.

Un point matériel est immobile ou en mouvement de translation uniforme (dans un référentiel galiléen) si la somme des forces extérieures qui s'exercent sur lui est nulle (les forces s'opposent et s'annulent, voir l'exemple de la figure 9.5 de l'objet relié à 3 câbles) :

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}}$$

Ceci dérive de la première loi de Newton.

En général, nous travaillerons dans un espace à 2 dimensions et cette équation vectorielle se résumera à l'étude de ses composantes suivant le plan Oxy .

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i F_{iy} = 0$$

Par la suite, on représentera des objets volumiques, mais comme on ne s'intéresse ici qu'au mouvement du centre d'inertie G de cet objet, tout se passe comme si les forces s'appliquaient sur G , le point matériel

est alors G doté de la masse de l'objet.

9.3.2 Moment résultant

Lorsque l'on considère la rotation d'un corps, on ne peut plus assimiler celui-ci à un point matériel. Cependant, nous pouvons toujours calculer le moment total des forces appliquées au corps par rapport à son centre de gravité par exemple.

Le centre de gravité ne constitue pas forcément le pivot idéal. En général, lors d'un exercice, si le choix nous est donné, nous choisirons toujours le pivot P tel qu'au moins une des forces appliquées est colinéaire au vecteur \vec{AP} , ce qui simplifiera les calculs.

Un corps est immobile vis-à-vis d'une rotation non uniforme si la somme des moments des forces extérieures qui s'exercent sur lui est nulle. Attention, il ne faut pas confondre le moment de la résultante \vec{M}_R avec le moment résultant \vec{M}_{tot} (qui est la somme des moments des forces). On a

$$\boxed{\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{PA}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}}$$

En général, nous travaillerons dans un espace à 2 dimensions et cette équation vectorielle se résumera à l'étude de sa composante suivant l'axe Oz .

$$\sum_i M_{iz} = \sum_i |PA_i| F_i \sin \alpha_i = 0$$

où les α_i sont les angles formés par les deux vecteurs \vec{F}_i et \vec{PA}_i .

Moment de la résultante : théorème de Varignon

Le moment **en** P de la résultante \vec{R} de plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ **concourantes en** A est égal à la somme des moments **en** P de ces différentes forces :

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{R}/P} = \sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i/P}}$$

avec $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$.

En effet :

$$\vec{M}_{\vec{R}/P} = \vec{PA} \times \vec{R} = \vec{PA} \times \left(\sum_i \vec{F}_i \right) = \sum_i \vec{PA} \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i/P}$$

Formule de transport du moment

Lorsqu'on connaît le moment d'une force en un point, il est possible de le recalculer en n'importe quel point de l'espace. Cela revient à poser une rallonge au levier \vec{AP} . On montre alors la relation suivante, avec un point Q quelconque :

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{F}/Q} = \vec{M}_{\vec{F}/P} + \vec{QP} \times \vec{F}}$$

En effet,

$$\vec{M}_{\vec{F}/P} = \vec{QA} \times \vec{F} = (\vec{QP} + \vec{PA}) \times \vec{F} = \vec{QP} \times \vec{F} + \vec{M}_{\vec{F}/P}$$

On peut vérifier alors que

$$\vec{M}_{\vec{F}/P} = \vec{M}_{\vec{F}/A} + \vec{PA} \times \vec{F} = \vec{PA} \times \vec{F}$$

car le moment calculé au point d'application de la force est nul.

En réalité une action mécanique est modélisée par un vecteur (représentant la force) et son point d'application. Il est possible de représenter cette action mécanique par l'ensemble « vecteurs force » et « moment » en un point. En pratique, on effectue la somme des forces, et la somme des moments tous exprimés au même point P , d'où l'intérêt de la formule de transport des moments.

9.3.3 Centre de masse, stabilité

Le centre de masse (ou barycentre, de barus (poids) et centre) est initialement le centre des poids. C'est donc une notion physique et mécanique. Le premier à avoir étudié le centre de masse en tant que centre des poids (ce qu'on appelle aussi plus vulgairement de nos jours le centre de gravité) est le mathématicien et physicien Archimède. Il est un des premiers à comprendre et expliciter le principe des moments, le principe des leviers et le principe du centre de masse. Il écrit dans son traité Sur le centre de gravité de surface plane :

« Tout corps pesant a un centre de gravité bien défini en lequel tout le poids du corps peut être considéré comme concentré. »

C'est le premier à avoir cherché des centres de gravité de surface comme des demi-disques, des paraboles. Il procède par approximations successives et a pu prouver que la recherche d'un centre de gravité utilise des méthodes analogues à celle du calcul d'aire. Son travail est prolongé par celui de Paul Guldin (1635/1640) dans son traité Centrobaryca et celui de Leibniz.

La notion de centre d'inertie G pour un système non solide est une notion dégagée par Christiaan Huygens (1654), lors de l'établissement de sa théorie des chocs. C'est alors qu'il énonce le principe de mécanique :

« Le centre de masse d'un système matériel se meut comme si toute la masse du système y était transportée, les forces extérieures du système agissant toutes sur ce centre de masse »

On peut remarquer le glissement subtil entre centre de masse, centre des poids (= centre de gravité) comme le voyait Archimède et centre de masse, centre des masses (= centre d'inertie).

Le centre de masse des points A et B affectés des masses m_A et m_B (non nulles) est l'unique point G tel que

$$m_A \vec{GA} + m_B \vec{GB} = \vec{0}.$$

Les coordonnées de G sont alors

$$x_G = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \quad y_G = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B} \quad z_G = \frac{m_A z_A + m_B z_B}{m_A + m_B}$$

Le nombre de points peut passer à trois points quatre points et même n points

Si $\sum_{i=1}^n m_i$ est non nulle, le centre de masse du système $\{(A_i, m_i)\}_{i=1\dots n}$ est le point G tel que

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{GA}_i = \vec{0}$$

Les coordonnées sont données par les formules, pour $j = 1, \dots, n$, où n est le nombre de dimension de l'espace,

$$x_{j,G} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_{j,A_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Le nombre de points peut même devenir infini, permettant de trouver le centre de masse d'une courbe ou d'une surface.

Si l'ensemble constitue un domaine D continu, à chaque point Q du domaine on affecte une densité $g(Q)$ où g est une fonction continue. Le centre de masse est alors le point G tel que

$$\int_D g(Q) \vec{PQ} dv = \vec{0} \quad \text{dans l'espace, ou} \quad \int_D g(Q) \vec{PQ} dr = \vec{0} \quad \text{dans le plan.}$$

Si les points Q ont pour coordonnées (x, y, z) , la fonction de densité s'écrit $g(x, y, z)$ et les coordonnées de G s'écrivent

$$x_G = \frac{\int \int \int g(x, y, z) x \, dx dy dz}{\int \int \int g(x, y, z) \, dx dy dz}$$

Si l'on se ramène à une dimension, ou bien si l'on considère chaque coordonnée séparément, on retrouve la formule de la moyenne pondérée :

$$x_G = \frac{\int g(x) x \, dx}{\int g(x) \, dx}$$

Exemple

Le cas élémentaire de l'équilibre de 2 forces permet de montrer comment un problème de statique ne dissocie pas forces et moments. Non seulement l'étude permet la détermination de l'ensemble des forces, mais aussi les conditions géométriques de l'équilibre. Pour cette étude de cas, comme pour les suivantes,

le principe fondamental de la statique nous donne les relations suivantes :

- aucun mouvement de translation possible : somme des forces extérieures nulle.
- aucun mouvement de rotation possible : somme des moments des forces extérieures nulle (les moments sont calculés en un même point qui peut être choisi arbitrairement).

Soit l'étude d'un pendule : la figure 1 ci-dessous donne une position quelconque. L'objectif est la détermination des conditions d'équilibre. le bilan des actions extérieures nous donne :

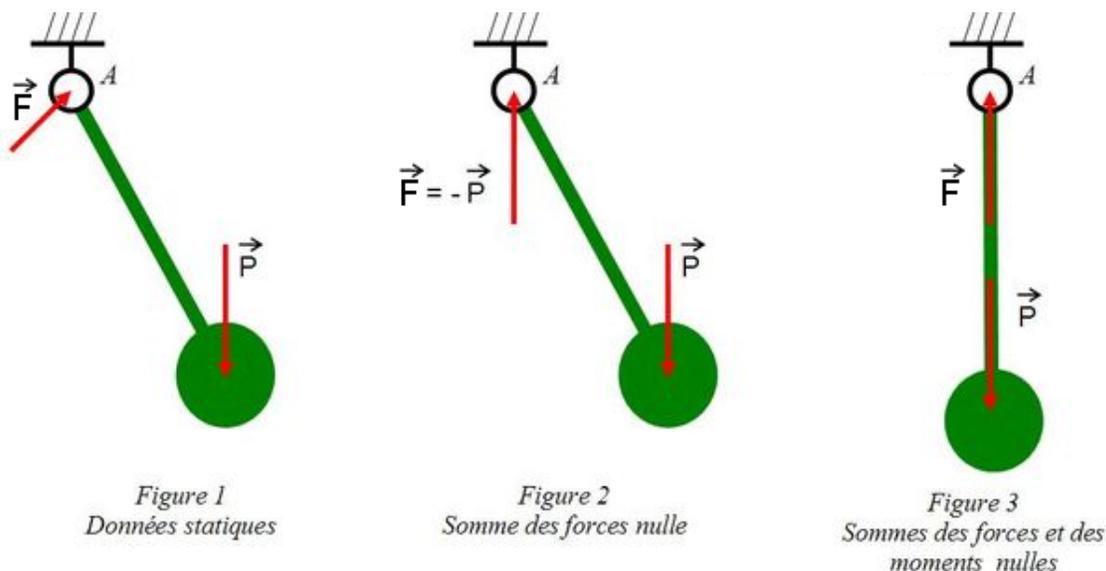


FIG. 9.20 – Cas du pendule : recherche de la position d'équilibre.

- le poids appliqué au centre de gravité de valeur connue.
- le pivot (ou articulation) parfait en A. la droite d'action passe par l'axe, mais est de direction inconnue.

L'équation d'équilibre relative aux forces donne donc : $\vec{A} + \vec{P} = \vec{0}$ Ce qui définit l'action dans le pivot de façon univoque, les deux forces formant alors un couple. La position proposée sur la figure 2 n'est donc pas une position d'équilibre.

L'équation des moments, par exemple calculée au point A, nous donne $M_{\vec{F}/A} + M_{\vec{P}/A} = 0$ soit $M_{\vec{P}/A} = 0$

Ce qui revient à dire que A appartient à la droite de glissement du poids. Nous aurions abouti à la même conclusion, peut être plus difficilement, en calculant les moments en n'importe quel point. En règle générale, le point de calcul des moments doit être choisi sur un critère de simplicité de calcul. Ici A ou G (centre de gravité) assurent l'annulation d'un des moments de force.

De ce fait les seules positions d'équilibre sont celles où le pendule est vertical, en dessous (position stable) ou au dessus de l'axe (position instable).

En résumé, pour qu'un solide soumis à deux forces soit en équilibre,

- les deux forces sont opposées (Résultante nulle)
- une même droite d'action pour les deux forces (Moment total nul)

9.4 Applications de la statique

En dehors des engrenages, leviers et des poulies dont l'humanité fait une utilisation quotidienne, il existe d'autres applications relativement modernes de la statique.

Par exemple, une dynamo actionnée par une éolienne. Les bobinages induisent un couple dont l'intensité est en rapport avec le courant électrique généré.

Le frottement a une influence sur le comportement statique des liaisons mécaniques. Certains modèles comme les lois de Coulomb décrivent ce comportement. La considération du frottement est parfois obligatoire pour la résolution d'un problème, comme par exemple l'équilibre d'une échelle, ou le dimensionnement d'un embrayage.

Finalement, l'étude de la résistance des structures et des matériaux découle bien évidemment de la statique. Par exemple lors de la conception d'un toit d'un Chalet de montagne, capable de résister au vent et au poids de la neige, qui peuvent être représentées par des forces constantes (la force maximum tolérable par la structure).

Chapitre 10

Dynamique du point

La dynamique est une discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces qui leurs sont soumises. Elle combine la statique qui étudie l'équilibre des corps au repos, et à la cinématique qui étudie le mouvement.

La dynamique nous permettra donc d'identifier le déplacement dans le temps d'un corps massif, connaissant les forces auxquelles il est soumis, ainsi que sa vitesse initiale.

C'est Guillaume d'Ockham (1280-1349) qui a introduit en 1323 la différence entre ce qu'on appelle le mouvement dynamique (que nous engendrons) et le mouvement cinétique (engendré par des interactions, dont des collisions).

Remarquons que la dynamique est aussi une grandeur utilisée en électronique et en traitement du signal, qui traduit le rapport entre le niveau maximum et le niveau minimum d'un signal, mais cela ne nous concerne pas.

10.1 Lois de Newton

Sir Isaac Newton est né le 4 janvier 1643, au manoir de Woolsthorpe près de Grantham, en Grande-Bretagne. Il est mort le 31 mars 1727, à Kensington. C'était un philosophe, mathématicien, physicien et astronome anglais. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour sa théorie de la gravitation.

Son ouvrage majeur, Principes mathématiques de la philosophie naturelle, fut publié en 1687 (traduit en français par la marquise du Châtelet en 1756). Les méthodes de calcul qu'il y utilise en font un précurseur du calcul vectoriel.

Bien que cet aspect de sa vie soit moins connu, Newton se passionna également pour l'alchimie et la théologie. Pour Newton, le but, inavoué de nos jours, de la mécanique rationnelle était, par ailleurs, de prévoir une partie de l'avenir : le mouvement des astres. Etude que Newton pouvait sans doute appliquer à l'astrologie dont de nombreux principes sont utilisés en alchimie.

« *L'espace est de durée éternelle et de nature immuable, et ce parce qu'il est l'effet émanant d'un être éternel et immuable. Si jamais l'espace n'avait pas existé, Dieu, à ce moment-là, n'aurait été présent nulle part... Si nous disons avec Descartes que l'étendue est le corps, ne frayons-nous pas manifestement la voie à l'athéisme ? Tant parce qu'alors l'étendue n'est pas une créature mais est de toute éternité, que parce que nous en avons une idée absolue sans rapport à Dieu, et qu'ainsi nous pouvons concevoir que l'étendue existe, tout en imaginant que Dieu n'existe pas ?* » (De Gravitatione).

Il est aussi réputé avoir passé une quinzaine d'années à calculer, à partir des écrits bibliques, la date de la fin du monde, laquelle est désormais dépassée.

En mécanique, la plupart de ses principes, déjà mis à mal par le développement de la thermodynamique au XIX^e siècle, ont été balayés par la relativité d'Einstein et la dualité onde-corpuscule. Cependant le génie de sa mécanique relationnelle était de simplifier beaucoup, ce qui contribua au développement des recherches dans le domaine de la mécanique simple, où la masse s'identifie à la matière et où l'on suppose une continuité parfaite.

10.1.1 La masse redéfinie

La masse est une propriété physique d'un objet qui mesure la quantité de matière (et d'énergie) contenus dans cet objet. Contrairement au poids d'un objet, la masse d'un objet reste constante quel que soit l'altitude d'un objet sur terre, et en général quelle que soit sa position dans l'univers.

L'unité de base de la masse est le kilogramme (kg). On utilise également la tonne égale à 1000 kg et l'unité de masse atomique égale à $\frac{1}{12}{}^{eme}$ de la masse d'un atome de carbone 12.

Dans les modèles physiques, la masse d'un objet intervient dans deux phénomènes distincts et a priori indépendants, régissant le mouvement des objets :

- la masse inertielle qui caractérise la quantité de mouvement d'un objet en déplacement (la quantité de mouvement globale de l'univers est une quantité qui se conserve).
- la masse grave (ou pesante) qui mesure l'influence d'un corps sur le champ gravitationnel.

S'il n'y a aucune raison théorique connue pour que ces deux quantités soit dépendantes l'une de l'autre, tous les résultats expérimentaux indiquent qu'elles sont directement proportionnelles. Cette équivalence implique le principe de la chute des corps exposé par Galilée puis Evangelista Torricelli : la vitesse d'un corps en chute libre ne dépend pas de sa masse. Cette égalité entre masse inertielle et masse grave a guidé Albert Einstein dans son intuition que la gravité est en fait une déformation de l'espace, et qui lui permit de formuler les lois de la relativité générale.

À notre échelle cette équivalence semble évidente et elle est démontrée expérimentalement à 10^{-12} près. Pourtant certaines théories scientifiques comme la théorie des cordes prédisent qu'elle pourrait cesser d'être vérifiée à des échelles beaucoup plus fines.

À l'échelle des atomes, de la matière peut se transformer en onde électromagnétique, et une onde

électromagnétique peut se transformer en matière. Plus exactement, des particules ayant une masse non nulle (neutrons, protons), peuvent se transformer à la suite d'une collision en particules élémentaires de masse nulle (photons, neutrinos...). C'est le principe des réactions nucléaires, par exemple utilisées pour produire de l'électricité. Dans les accélérateurs de particules, on observe fréquemment ce genre de transformation. À l'inverse, un photon, de masse nulle, peut se décomposer après collision sur un atome en une paire électron-positron, ayant une masse.

Lors de ces transformations, la loi de la conservation de l'énergie est respectée, la masse peut donc s'exprimer sous la forme d'une énergie :

$$E = m c^2$$

avec E l'énergie « de masse », m la masse et c la vitesse de la lumière dans le vide.

En dynamique du point, quel que soit le phénomène considérée, à l'instar de Newton, nous définirons la masse m d'un point P comme étant le coefficient de proportionnalité liant la résultante \vec{F} des forces appliquées en P et son l'accélération \vec{a} . On a

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

10.1.2 Masse volumique, densité, force, poids

Masse volumique

Pour toute substance homogène, le rapport de la masse m correspondant à un volume V de cette substance est indépendante de la quantité choisie : c'est une caractéristique du matériau appelée masse volumique ρ . On a

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Mais le volume d'une masse donnée dépend de la température et, particulièrement pour les gaz, de la pression. La masse volumique dépend donc des conditions de température et de pression.

Pour des conditions de température et de pression données, le coefficient de proportionnalité $\frac{m}{V}$ est une caractéristique du matériau.

L'unité de mesure de la masse volumique est dérivée des unités de mesure de masse et de volume. On peut ainsi exprimer la masse volumique en g/cm^3 , kg/dm^3 , t/m^3 .

Remarques :

1. Dans ces unités, la valeur numérique ne change pas car $1 g/cm^3 = 1 kg/dm^3 = 1 t/m^3$.
2. La tonne n'est pas une unité de masse du système international. Il convient d'utiliser le kilogramme et ses multiples ou sous-multiples.

3. La masse volumique de l'eau est proche de 1 kg/dm^3 . Ce n'est pas un hasard, mais cela résulte des premières tentatives de définition du kilogramme comme valant la masse d'un litre d'eau (1 décimètre cube). (Sa valeur actuelle est, à $4 \text{ }^\circ\text{C}$, de $999,95 \text{ kg/m}^3$).

Lors d'applications, nous utiliserons le plus fréquemment les valeurs de 10^3 kg/m^3 pour la masse volumique de l'eau et $1,2 \text{ g/l}$ pour la masse volumique de l'air à $20 \text{ }^\circ\text{C}$ et pression atmosphérique normale. (voir tableau 10.1)

Densité

La densité est un nombre sans dimension, égal au rapport d'une masse volumique d'une substance homogène à la masse volumique d'eau pure à la température de $3,98 \text{ }^\circ\text{C}$. Pour les gaz, la densité est calculée en rapport avec la masse volumique de l'air.

Par définition, la densité de l'eau pure à $3,98 \text{ }^\circ\text{C}$ est égale à 1. La valeur de la densité permet de déterminer la flottabilité d'un matériau dans de l'eau pure. Si cette valeur est inférieure à 1 (celle de l'eau), un bloc de matériau flottera (puisqu'à volume égal, il subira immergé dans l'eau une poussée supérieure à son propre poids).

La définition de la densité¹ permet sa mesure en laboratoire. Elle peut aussi se calculer en divisant la masse volumique de la substance par $1\,000 \text{ kg/m}^3$, masse volumique de l'eau pure à $3,98 \text{ }^\circ\text{C}$.

Les densités les plus importantes connues sont peut-être atteintes dans les étoiles à neutrons. La singularité gravitationnelle au centre d'un trou noir, conformément à la relativité générale, n'a pas de volume et sa densité peut ainsi être vue comme infinie ou inexistante.

Les substances les plus denses sur Terre sont l'osmium et l'iridium, dont la densité dépasse 22,6.

Il est assez facile de mesurer la densité d'un corps solide insoluble et imperméable.

Densité supérieure à celle de l'eau : le plomb

- Prendre une balance électronique à plateau et mettre un récipient contenant de l'eau.
- Appuyer sur le bouton tare et la balance affiche zéro.
- Attacher l'objet à un fil fin (dans l'expérience photographiée : 6 plomb de pêche de 15 g).
- Mettre l'objet sur la balance qui affiche 90 grammes que l'objet soit sur le plateau ou qu'il soit au fond du récipient contenant de l'eau.
- Tenir l'objet par le fil de façon qu'il soit immergé sans toucher les parois du récipient : la balance indique 8 grammes dus à la célèbre poussée d'Archimède.

¹Attention : en anglais le mot mass-density est souvent réduit à density pour signifier masse volumique. La densité comme définie dans le système métrique se traduit, en anglais, dans le système de mesures anglo-saxon, en « Specific Gravity » (trad. : masse spécifique).

Roches, minéraux corps usuels	masse volumique kg/m ³
ardoise	2700 - 2800
amiante	2500
argile	1700
béton	2000
calcaire	2600 - 2700
craie	1250
granite	2600 - 2700
Grès	2600
kaolin	2260
marbre	2650 - 2750
quartz	2650
Pierre ponce	910
porcelaine	2500
terre végétale	1250
verre à vitres	2530

Bois	masse vol kg/m ³
acajou	700
buis	910 - 1320
cèdre	490
chêne	610 - 980
chêne (cœur)	1170
ébène	1150
frêne	840
hêtre	800
liège	240
peuplier	390
pin	740
platane	650
sapin	450
teck	860

Gaz à 0°C	masse vol kg/m ³	formule
acétylène	1,170	-
air	1	-
air à 20°C	1,204	-
ammoniac	0,77	-
argon	1,7832	Ar
azote	1,250 51	N ₂
butane (iso-)	2,670	-
butane (normal)	2,700	-
dioxyde de carbone	1,976 9	CO ₂
eau (vapeur) à 100°C	0,5977	H ₂ O
hélium	0,178 5	He
dihydrogène	0,0899	H ₂
krypton	3,74	-
néon	0,90	-
oxyde de carbone	1,250	CO
ozone	2,14	O ₃
propane	2,01	-
radon	9,73	Rn

Métaux et alliages	masse volumique kg/m ³
acier	7850
acier rapide HSS	8400 - 9000
Fonte	6800 - 7400
aluminium	2700
argent	10500
bronze	8400 - 9200
carbone (diamant)	3508
carbone (graphite)	2250
constantan	8910
cuivre	8920
Duralumin	2900
fer	7860
iridium	22640
laiton	7300 - 8400
lithium	530
magnésium	1750
mercure	13600
molybdène	10200
nickel	8900
or	19300
osmium	22610
palladium	12000
platine	21450
plomb	11350
potassium	850
tantale	16600
titane	4500
tungstène	19300
uranium	18700
vanadium	6100
zinc	7150

Liquides	masse vol kg/m ³
acétone	790
acide acétique	1049
azote à -195°C	810
brome à 0°C	3087
eau	1000
eau de mer	1030
essence	750
éthanol	789
éther	710
gasoil	850
glycérine	1260
hélium à -269°C	150
huile d'olive	920
hydrogène à -252°C	70
lait	1030
mercure	13545,88
oxygène à -184°C	1140

Matières plastiques	masse vol kg/m ³
Polypropylène	850 - 920
Polypropylène basse densité	890 - 930
Polypropylène haute densité	940 - 980
ABS	1040 - 1060
Polystyrène	1040 - 1060
Nylon 6,6	1120 - 1160
Polyacrylate de méthyle	1160 - 1200
PVC + plastifiant	1190 - 1350
Polyéthylène/téréphtalate	1380 - 1410
PVC	1380 - 1410
Bakélite	1350 - 1400

FIG. 10.1 – Tables des masses volumiques de diverses substances. Sauf indications contraires, les masses volumiques sont données pour des corps à la température de 20 °C, sous la pression atmosphérique normale.

On en déduit que le plomb a une densité de $90/8 = 11,25$. La température de l'eau étant de $18\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Densité inférieure à celle de l'eau : le liège

- Prendre un bouchon de grand volume, genre bouchon de pot de moutarde et donc une coupelle contenant de l'eau de diamètre plus grand que le diamètre du bouchon.
- Prendre une balance électronique à plateau et mettre la coupelle contenant de l'eau.
- Appuyer sur le bouton tare et la balance affiche zéro.
- Mettre une épingle sur l'axe du bouchon.
- Mettre le bouchon sur la balance qui affiche 12 grammes qu'il soit sur le plateau ou qu'il soit flottant sur l'eau du récipient : l'eau transmet le poids du bouchon à la balance, via la célèbre poussée d'Archimède.
- Tenir par l'intermédiaire de l'aiguille le bouchon de façon qu'il soit entièrement immergé sans toucher les parois du récipient : la balance indique 52 grammes dus à la célèbre poussée d'Archimède.

On en déduit que le liège a une densité de $12/52 = 0,23$; la température de l'eau étant de $18\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Parler de « densité relative » constitue a priori un pléonasme. Cependant, il peut être utile de faire des comparaisons dans des conditions hors normes. On peut par exemple avoir besoin de comparer, à la température ambiante, une pièce réalisée en bronze (densité 8,1) à la même pièce réalisée dans un alliage d'aluminium (densité 2,7). On pourra dire alors que le bronze est (relativement) trois fois plus dense que l'aluminium, ou que la densité (relative) du bronze par rapport à l'aluminium est de 3. Ce n'est pas le caractère relatif qui change, mais la référence.

Pourquoi choisir l'eau à $3,98\text{ }^{\circ}\text{C}$? Il se trouve que lorsque la température de l'eau baisse, son volume diminue, jusqu'à $3,98\text{ }^{\circ}\text{C}$, et augmente si l'on continue de refroidir jusqu'à la congélation. Dans le domaine des mesures, le fait de prendre comme référence une propriété physique qui passe par un extrémum est très intéressant : au voisinage de $3,98\text{ }^{\circ}\text{C}$, la masse volumique de l'eau reste sensiblement constante, on n'a donc pas besoin de déterminer la température avec une grande précision, ce qui ne serait pas le cas aux autres températures. La masse volumique et la densité de l'eau sont maximales à $3,98\text{ }^{\circ}\text{C}$ à la pression atmosphérique normale.

Cette particularité permet à l'eau tiède, à l'eau très froide et à la glace de flotter au-dessus de l'eau à $3,98\text{ }^{\circ}\text{C}$. Si l'eau se comportait comme la plupart des autres corps, la glace tomberait au fond des lacs, des rivières et des océans, où la vie serait alors pratiquement impossible, du moins sous la forme que nous connaissons.

Parmi les métaux moins denses à l'état solide qu'à l'état liquide, il existe l'argent et le bismuth. Cela pose des problèmes importants lors du moulage, à cause du gonflement qui accompagne la solidification.

Force

Dans Star Wars, la Force est une énergie qui baigne l'Univers et relie les êtres entre eux par un lien invisible.

Cependant, en physique, la force est une action mécanique capable de créer une accélération, c'est-à-dire une modification de la vitesse d'un objet ou d'une partie d'un objet, ce qui induit un déplacement ou une déformation de l'objet. Elle est généralement représentée par un vecteur (\vec{F} , \vec{G} , ...) pour donner son sens et sa direction (au sens mathématique du terme), et elle est donnée en Newton (N). Enfin, une force peut avoir une direction et un sens identique mais une intensité différente.

Le mot force peut donc désigner un pouvoir mécanique sur les choses, et aussi, métaphoriquement, un pouvoir de la volonté ou encore une vertu morale « cardinale » équivalent au courage

Poids

Le poids \vec{P} d'un corps nu ou force de pesanteur est la force exercée sur un corps (de masse m) immobile dans le référentiel terrestre (c'est-à-dire, lié à l'objet solide Terre en rotation), par l'attraction universelle des autres masses et les forces inertielles (dûes au fait que le référentiel terrestre n'est pas un référentiel galiléen). Quel que soit le corps, le rapport du poids $P = \|\vec{P}\|$ à sa masse m est identique et noté g tel que $P = mg$.

De ce fait, tous les corps tombent, dans le vide, selon la même accélération $a = g$ (loi de Galilée (1564 - 1642)). (voir chute libre)

La masse m s'exprimant en kilogramme (kg), le poids est une force et possède donc comme unité le newton (symbole N), et l'accélération g sera indifféremment exprimée en N/kg ou en m/s^2 .

La non-distinction entre masse et poids dure jusqu'au XIXe siècle, et perdure dans le langage courant. Par exemple, « la masse corporelle d'une personne » est usuellement appelée son « poids ». Il en résulte une difficulté pédagogique, au moment où cette distinction est enseignée. L'adoption du Système International (S.I.) a permis grâce à la suppression de l'unité kilogramme-poids de résoudre partiellement cette difficulté.

L'accélération de pesanteur g est l'objet d'étude de la gravimétrie. Elle varie en tout point de la Terre, essentiellement diminuant du pôle ($9.83 m/s^2$) à l'équateur ($9.78 m/s^2$). En Belgique, on prend conventionnellement la valeur de g telle que $g = 9.81 m/s^2$. Comment la retrouver ?

Sachant que le rayon R de la Terre est égal à $6380 km$ et sa masse M_T est égale à $5,98 \cdot 10^{24} kg$, on peut déterminer la valeur de la constante g qui s'exerce sur un objet quelconque de masse m . On a

$$m \frac{G M_T}{R^2} \simeq 9,81 m$$

On rappelle que G est la *constante universelle de gravitation*.

La notion de pesanteur se généralise à d'autres corps célestes, en particulier la Lune où la gravité est environ six fois moindre que sur Terre.

10.1.3 Les 3 lois de Newton : inertie, force et accélération, action et réaction

Les lois du mouvement de Newton sont en fait des principes à la base de la grande théorie de Newton concernant le mouvement des corps, théorie que l'on nomme aujourd'hui Mécanique newtonienne ou encore Mécanique classique. À ces lois générales du mouvement fondées en particulier sur le principe de relativité des mouvements, Newton a ajouté la loi de la gravitation universelle permettant d'interpréter aussi bien la chute des corps que le mouvement de la Lune autour de la Terre.

Première loi de Newton ou principe d'inertie

L'énoncé original de la première loi du mouvement est le suivant :

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.

Autrement dit, s'il n'y a pas de force qui s'exerce sur un corps (corps isolé), ou si la somme des forces s'exerçant sur lui est égale au vecteur nul (corps pseudo-isolé), la direction et la norme de sa vitesse ne changent pas ou, ce qui revient au même, son accélération est nulle. Cette première loi infirme les lois de la physique d'Aristote, d'après lesquelles on pensait que pour maintenir la vitesse d'un mobile constante, il était nécessaire de lui appliquer une force.

Bien que Newton ne l'ait pas précisé dans son ouvrage, cette loi n'est valable que dans un référentiel galiléen. La première loi de Newton peut donc être reformulée dans un langage plus moderne :

Dans un référentiel galiléen, le vecteur vitesse du centre d'inertie d'un système est constant si et seulement si la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur le système est un vecteur nul.

La définition d'un référentiel galiléen apparaît fondamentale et est souvent formulée ainsi :

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la première loi de Newton est vérifiée

Ainsi la première loi de Newton ne s'applique que dans un référentiel galiléen et un référentiel galiléen est un référentiel où la première loi de Newton s'applique, ce qui semble être une définition circulaire. Pour éviter ce problème, on peut réécrire le principe d'inertie comme suit :

Il existe une famille de référentiels, appelés galiléens ou inertiels, tels que, par rapport à l'un de ces référentiels, tout point matériel isolé (qui n'est soumis à aucune action extérieure) est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

La détermination d'un bon référentiel galiléen est en réalité expérimentale et comme souvent en Physique, seule la cohérence entre la théorie (ici la première loi de Newton) et la mesure (mouvement rectiligne uniforme) valide le choix a posteriori.

Deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique (parfois appelé Relation fondamentale de la dynamique) s'énonce ainsi :

Soit un corps de masse m constante, l'accélération subie par un corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m .

Ceci est souvent récapitulé dans l'équation :

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum \vec{F}_i$$

ou

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = m\vec{a}}$$

où \vec{F}_i désigne les forces exercées sur l'objet, m est sa masse, et \vec{a} correspond à l'accélération de son centre d'inertie G .

Une forme plus générale, valable également si la masse change au cours du temps est

La force est égale aux changements de quantité de mouvement par unité de temps.

Ceci est souvent récapitulé dans l'équation :

$$\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

où \vec{F}_i désigne les forces exercées sur l'objet, $\vec{p} = m\vec{v}$ est la quantité de mouvement, égale au produit de sa masse m et de sa vitesse \vec{v} .

Ce théorème est appelé **théorème de la quantité de mouvement**. Pour un solide de masse fixe en mécanique newtonienne, il est équivalent à la seconde loi.

Ainsi, la force nécessaire pour accélérer un objet est le produit de sa masse et de son accélération : plus la masse d'un objet est grande, plus grande est la force requise pour l'accélérer à une vitesse déterminée

(en un laps de temps fixé). Quelle que soit la masse d'un objet, toute force nette non-nulle qui lui est appliquée produit une accélération.

Pour un corps soumis à une résultante des forces nulle on retrouve bien la première loi de Newton, c'est à dire un mouvement rectiligne uniforme. En première analyse, on peut se demander quelle est l'utilité de la première loi puisqu'elle semble être une conséquence de la deuxième. En réalité, dans l'énoncé de Newton, il n'en est rien car la première loi n'est pas présentée comme un cas particulier de la deuxième mais comme une condition suffisante à l'application de cette dernière. En effet, énoncer la première loi, c'est affirmer l'existence des référentiels galiléens. Cela constitue un postulat extrêmement fort qui permet, dans les exposés modernes de la mécanique classique, de définir les repères galiléens qui sont les seuls repères dans lesquels la seconde loi est valide. En l'absence de la première loi, la seconde loi est inapplicable puisqu'on ne peut pas définir son domaine de validité. Par conséquent, l'ordre logique dans lequel les lois sont énoncées n'est pas le fruit du hasard mais bien celui d'une construction intellectuelle cohérente.

Notons enfin qu'il est possible de reformuler de manière plus large la deuxième loi de Newton dans un référentiel non galiléen en ajoutant des termes dans l'équation qui sont homogènes à des forces, et qu'on appelle souvent « forces fictives ». Ces termes ne sont pas des forces au sens usuel mais des termes correctifs d'origine géométrique et cinématique. Nous en étudierons un exemple lorsque nous survolerons la force centrifuge.

Troisième loi de Newton ou principe des actions réciproques

Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B.

A et B étant deux corps en interaction, la force $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ (exercée par A sur B) et la force $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ (exercée par B sur A) qui décrivent l'interaction sont directement opposées :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

Dans le cas de la mécanique du point, la troisième loi précise également :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} \times \vec{AB} = \vec{0}$$

Autrement dit, la droite de glissement de la force d'interaction est aussi la droite reliant les positions des particules composant le corps.

Ces forces ont la même droite d'action, des sens opposés et la même norme. Ces deux forces sont toujours directement opposées, que A et B soient immobiles ou en mouvement.

Cette loi est parfois appelée *loi d'action - réaction*, une formulation au mieux imprécise, au pire entraînant de nombreuses confusions. En particulier, cette ancienne formulation véhicule l'idée qu'il y a toujours une force qui est la « cause » (l'action), l'autre n'étant qu'une sorte de conséquence (la réaction).

Une autre difficulté rencontrée par les étudiants est l'oubli que ces 2 forces $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ et $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ s'exercent sur 2 corps différents. Elles ne peuvent donc pas « s'annuler mutuellement ». L'effet d'annulation n'intervient que lorsqu'on considère un système constitué de différents corps et que l'on s'intéresse à la résultante des forces : dans ce cas, les forces intérieures s'annulent en effet et seule la somme des forces extérieures est à prendre en compte (ce qui est heureux pour étudier le mouvement d'un solide constitué de plus de 10^{23} éléments).

Il convient de faire remarquer ici que la loi des actions réciproques a l'inconvénient de supposer l'application des forces comme instantanée (ce qui est abandonné en relativité restreinte). Dans le cas des forces à distance, il convient dans certains cas d'effectuer des transformations pour tenir compte du retard de propagation.

Cette correction ne relève pas de la relativité. Comme les forces électromagnétiques s'appliquent à distance, on avait mis en évidence que ces forces se propagent à la vitesse de la lumière et non à vitesse infinie, et inclu cette nuance dans les équations, avant la révolution de la relativité restreinte

Loi d'interaction gravitationnelle

Certains auteurs appellent quatrième loi de Newton sa Loi universelle de la gravitation. Cette dénomination est très contestable, mais elle est mentionnée ici à cause de la parenté historique des lois : si cette loi ne fait pas partie des principes de la mécanique au même titre que les trois autres et le principe de relativité, la première réussite de Newton fut d'utiliser ses lois mécaniques plus sa loi d'interaction gravitationnelle pour démontrer les lois empiriques de Kepler. Ce sont ces premiers succès qui établirent pour longtemps la domination des lois de Newton sur la science.

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{1}_r$$

où

- F est la force de gravitation reliant deux corps dotés d'une masse.
- G est la constante de gravitation universelle.
- m_1 est la masse du premier corps.
- m_2 est la masse du second corps.
- R est la distance séparant les deux corps.
- $\vec{1}_r$ est le vecteur directeur de la droite joignant les centres de gravité respectifs des deux corps (par exemple, du corps 1 au corps 2).

Notons qu'en combinant cette loi et le principe fondamental de la dynamique, on démontre la prédiction de Galilée selon laquelle dans le vide, tous les objets tombent à la même vitesse (en admettant

implicitement qu'inertie et masse gravitationnelle sont égales).

« Cinquième corollaire » de Newton : principe de relativité

Newton dans ses *Principia* a mis en évidence la notion de relativité du mouvement dans les définitions précédant le livre premier. Toutefois, en introduisant la notion d'espace absolu, il ne dégage pas encore la notion de référentiel galiléen telle qu'elle est définie aujourd'hui. D'autre part, Newton ne fait aucune référence au cas où un référentiel n'est pas en mouvement rectiligne uniforme par rapport à ce qu'il appelle l'espace absolu. Ses résultats sont donc implicitement valables dans des référentiels en mouvement rectiligne uniforme mais aucune infirmation de la validité de ses lois dans les référentiels accélérés n'est donnée dans les *Principia*. Il faudra attendre les travaux de Coriolis et de Foucault au XIXe siècle pour que la notion de référentiel galiléen telle qu'elle est connue aujourd'hui se dégage et pour que les formules de changement de repère vers (ou depuis) un référentiel non galiléen soient établies.

Le principe de relativité s'énonce comme suit : « *Deux référentiels d'espace en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre sont équivalents pour les lois de la mécanique* ».

Au sens de Newton, il faudrait se restreindre aux référentiels en mouvement rectiligne uniforme par rapport à l'espace absolu, en se souvenant que si un référentiel est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un deuxième lui-même en mouvement rectiligne uniforme par rapport à l'espace absolu, alors le premier référentiel est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à l'espace absolu.

On pourra le vérifier, en admettant les trois premières lois, l'invariance du temps, de la masse et des forces. C'est pourquoi ce principe est appelé ici corollaire.

Ce principe est dit principe de relativité galiléenne, car on en trouve la trace dans le célèbre Dialogue de Galilée, quoique Galilée avait supposé qu'il en était de même pour une rotation uniforme, ce qui n'est pas le cas.

Une formulation plus moderne affirme que toutes les lois de la physique sont les mêmes pour deux référentiels d'espace en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. C'est cette formulation forte qui est à la base de la relativité restreinte.

Remarquons que le référentiel héliocentrique est (généralement considéré comme) galiléen et c'est dans ce référentiel que sont étudiés les mouvements des planètes et des sondes spatiales. Considérer le référentiel géocentrique comme galiléen, alors que le centre de la Terre est en accélération autour du Soleil, revient à négliger les forces de marée. Considérer le référentiel terrestre comme galiléen revient à négliger la composante centrifuge dans la « pesanteur », et la force de Coriolis si le point matériel est en mouvement. D'une façon pragmatique, savoir trouver à quel degré d'approximation un référentiel peut être (considéré comme) galiléen est une quête sans cesse repoussée.

En 1905 la théorie de la relativité restreinte d'Albert Einstein montre que la notion de temps absolu, est un concept qui ne donne des résultats corrects qu'aux vitesses beaucoup plus petites que la vitesse

de la lumière. Autre conséquence de la relativité restreinte, aucun corps matériel ne peut dépasser une vitesse-limite appelée c , dont on considère, jusqu'à aujourd'hui, qu'elle est égale à la célérité du photon, par définition : $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$.

De même en 1915, en généralisant le principe de relativité, Einstein propose sa théorie de la gravitation, encore en 2005 non testée dans un laboratoire terrestre, mais vérifiée et non infirmée en astronomie, avec une précision croissante. Cette théorie propose une propagation de la gravitation à la vitesse de la lumière, évitant la propagation à vitesse infinie imposée par les équations de Newton. Cette nouvelle vision de la gravité souligne l'importance du résultat préalable admis par Newton suivant lequel la masse inertielle est égale à la masse gravitationnelle.

Malgré tout, cet édifice des principes reste un monument de la pensée humaine. Ces simples lois permettent à elles seules de construire toute la mécanique usuelle, c'est-à-dire de décrire toute la physique excepté les situations quantiques ou relativistes.

La prédiction du mouvement des planètes par les équations de Newton était remarquable. Et en tenant compte des interactions des planètes, la seule aberration par rapport à la réalité était le petit résidu de 43 secondes d'arc par siècle pour l'avance du périhélie de Mercure, et il a fallu la relativité générale pour l'expliquer.

Et dans la vie commune des faibles vitesses (autre donc que l'architecture « relativiste » des bâtiments du LHC, au CERN), on se satisfait bien de ces lois du mouvement d'usage pratique.

Et, dès que l'on veut la précision ultime (par exemple, une meilleure précision des systèmes de positionnement global, GPS ou Galileo), alors on sait qu'il faut corriger légèrement Newton par Einstein, ou par Heisenberg quand on étudie les atomes.

Limites relativistes de la mécanique newtonienne

Historiquement, la troisième loi permet cependant d'introduire dans les mentalités le concept d'interaction, fondamental en physique. À l'époque, cette loi est une absurdité, si l'on se réfère par exemple au point de vue d'Aristote chez qui la magie et autres actions à distance n'existent pas dans le cadre de la physique. Rappelons que le magnétisme est interprété depuis le de Magnete de Gilbert par des « lignes spectrales », ou tourbillons. De même, la cause de la gravitation est interprétée par Descartes via une théorie (fausse) de tourbillons, si contradictoire que même Huygens n'y croît plus. Par contre, Newton déclarera dans une phrase restée célèbre : *hypotheses non fingo, je ne chercherai pas la cause ultime de la gravitation*. La gravitation « s'exprime » au travers de la loi centripète qu'il énonce, il ne fait aucune supposition sur la nature de cette force.

Newton sortait donc hardiment hors du cadre imposé par la physique de l'époque, d'où une critique véhémente, l'action instantanée à distance étant récusée (elle gênait d'ailleurs à Newton lui-même), comme insensée (Rømer venait de montrer la finitude de la célérité de la lumière). En 1915, Einstein proposera une hypothèse moins choquante : la gravitation se propage, à la vitesse limite c .

Newton avait postulé : il existe un espace et un temps absolu.

En fait, on pouvait étendre à toute une classe de référentiels dits « inertiels » la notion d'espace absolu : quête sans fin, mais de plus en plus précise. Si aucun référentiel usuel n'est parfaitement inertielle, on peut du moins prouver qu'ils existent. Mais Newton a eu tort de ne pas croire entièrement Galilée qui défendait l'équivalence entre un référentiel et un autre évoluant à vitesse constante par rapport au premier.

Par contre, Newton se méfiait du temps absolu : il savait qu'en changeant l'échelle de temps, l'expression de son principe fondamental de la dynamique changeait. Il l'a même savamment utilisé. Mais évidemment, il fallait prendre une décision : quelle échelle de temps choisir ? Ce qui paraissait le plus simple était la fameuse loi de Kepler. Et tout était cohérent.

Les notions de temps relatif, de finitude des vitesses, de synchronisation et de transport du temps allaient nécessiter encore beaucoup de découvertes avant d'être entrevues. Il a donc opté pour le temps dynamique absolu et édicté : le temps absolu s'écoule uniformément. C'est cette variable t qui intervient quand on écrit

$$v = \frac{dr}{dt}$$

puis

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ce temps absolu est généralement admis tant qu'on n'emploie pas la relativité restreinte. Mais il constitue néanmoins une hypothèse philosophique forte qui a été régulièrement discutée par Leibniz notamment qui disait :

« J'ai marqué plus d'une fois que je tenais l'espace pour quelque chose de purement relatif, comme le temps ; pour un ordre de coexistences comme le temps est un ordre de successions... »

Une des grandes difficultés des théories de Newton, mise à jour dès le XVIIe siècle est la notion d'action instantanée à distance. Newton lui-même était gêné par cette supposition présente tout aussi bien dans sa théorie de la gravitation que dans sa troisième loi. Plus tard au cours du XVIIe siècle un certain nombre de difficultés, concernant l'électromagnétisme notamment, indiquèrent également que les principes de Newton ne pouvait pas rendre compte en l'état de tous les problèmes mécanique ou cinématique.

La relativité restreinte postule aujourd'hui qu'aucune interaction ne se propage plus vite que la vitesse de la lumière et remet donc définitivement en cause les interactions spontanées. De plus elle montre que pour des objets dont la vitesse est proche de celle de la lumière les lois de Newton ne sont plus qu'approchées. En fait, les formules de la relativité restreinte permettent de considérer la physique newtonienne comme une approximation ou supposant c infinie.

Ainsi les lois de Newton ne sont pas réfutées par Einstein, au contraire, la relativité permet de justifier les équations de Newton dans les cas de faibles vitesses en la rendant démontrable à partir d'une théorie plus générale qui l'englobe.

D'autre part même en relativité restreinte, les forces respectent toujours un théorème de la quantité de mouvement mais adapté, faisant apparaître le facteur de Lorentz. Le théorème de la quantité de mouvement est donc un théorème très puissant, puisqu'il permet de déduire les lois de Newton dans le cas où les faibles vitesses le permettent. Dans le cas contraire il s'inscrit dans les résultats de la relativité restreinte.

Il serait bien sûr absurde de dire que les lois de Newton sont fausses. La chute d'un corps sur Terre est un cas où les corrections apportées par la relativité sont minimales, comme pour la plupart des applications quotidiennes de la mécanique classique.

En revanche, une situation où les résultats sont radicalement modifiés est celle, par exemple, de l'accélérateur de particules du CERN. L'énergie cinétique apportée à une particule de charge q par une tension V vaut qV . Avec le TeraVolt (1 000 milliards de volts) du CERN, on trouve classiquement pour un électron une vitesse 2 000 fois supérieure à la vitesse de la lumière. La vitesse réelle, calculée dans le cadre relativiste est celle de la lumière diminuée de quelques microns/seconde. Il est donc essentiel de bien distinguer les situations où les lois de Newton sont valables de celles où elles ne sont plus utilisables.

10.2 Mouvements particuliers et gravitation

10.2.1 Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Lorsqu'un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, son vecteur vitesse est constant (en direction, en sens et en norme). Donc, $\vec{v}(t) = \vec{v}$ et $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{0}$. Nous pouvons donc conclure que la somme des forces qui lui est appliqué est nulle elle aussi. On a donc l'équation vectorielle

$$m \vec{a}(t) = \vec{0}$$

qui peut s'écrire, sous forme paramétrique,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m a_x = 0 \\ m a_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ m \frac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \text{ constante} \\ v_y = v_{0y} \text{ constante} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dr_x}{dt} = v_{0x} \\ \frac{dr_y}{dt} = v_{0y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dr_x = v_{0x} dt \\ dr_y = v_{0y} dt \end{cases}$$

Avec la condition initiale $\vec{r}(t)|_{t=t_0} = \vec{r}_0$, qui peut donc s'exprimer par les deux équations $r_x(t_0) = r_{0x}$ et $r_y(t_0) = r_{0y}$ et que nous allons injecter dans le système que nous étudions. Nous obtenons, comme dans l'étude cinématique du MRU,

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{r_{0x}}^{r_x} dr_x = \int_{t_0}^t v_{0x} dt \\ \int_{r_{0y}}^{r_y} dr_y = \int_{t_0}^t v_{0y} dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_x - r_{0x} = v_{0x}(t - t_0) \\ r_y - r_{0y} = v_{0y}(t - t_0) \end{cases}$$

En conclusion, nous pouvons constater que ce système, qui peut s'écrire de manière condensée

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0)}$$

se présente comme deux équations dépendant d'un paramètre commun : le temps. On pourra donc faire abstraction du temps pour dessiner la trajectoire du projectile sur un plan Oxy .

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} r_x(t) &= v_{0x}(t - t_0) + r_{0x} \\ r_y(t) &= v_{0y}(t - t_0) + r_{0y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{r_x - r_{0x}}{v_{0x}} + t_0 &= t \\ \frac{r_y - r_{0y}}{v_{0y}} + t_0 &= t \end{cases} \\ \Leftrightarrow \frac{r_x - r_{0x}}{v_{0x}} + t_0 &= \frac{r_y - r_{0y}}{v_{0y}} + t_0 \\ \Leftrightarrow r_y &= \frac{v_{0y}}{v_{0x}} r_x + (r_{0y} - r_{0x} \frac{v_{0y}}{v_{0x}}) \end{aligned}$$

En posant $m = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ et $p = r_{0y} - r_{0x} \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$, on constate que la trajectoire du projectile considéré sera rectiligne, étant donné que nous avons l'équation d'une droite.

$$\Leftrightarrow r_y = m r_x + p$$

10.2.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

Lorsqu'un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, son vecteur accélération est constant (en direction, en sens et en norme). Donc, $\vec{a}(t) = \vec{a}$ et $\vec{a} = \dot{\vec{v}}(t)$. Nous pouvons donc conclure que la somme des forces qui lui est appliqué \vec{F} n'est pas nulle. On a donc l'équation vectorielle

$$m \vec{a}(t) = \vec{F}$$

Avec les conditions initiales $\vec{r}(t)|_{t=t_0} = \vec{r}_0$, qui peut donc s'exprimer par les deux équations $r_x(t_0) = r_{0x}$ et $r_y(t_0) = r_{0y}$, et $\vec{v}(t)|_{t=t_0} = \vec{v}_0$, qui peut donc s'exprimer par les deux équations $v_x(t_0) = v_{0x}$ et $v_y(t_0) = v_{0y}$ que nous allons injecter dans le système que nous étudions. Nous obtenons, comme dans l'étude cinématique du MRUA, l'équation que nous pouvons encore écrire sous forme paramétrique :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} m a_x &= F_x \\ m a_y &= F_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} &= F_x \\ m \frac{dv_y}{dt} &= F_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x &= \frac{F_x}{m}(t - t_0) + v_{0x} \\ v_y &= \frac{F_y}{m}(t - t_0) + v_{0y} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dr_x}{dt} &= \frac{F_x}{m}(t - t_0) + v_{0x} \\ \frac{dr_y}{dt} &= \frac{F_y}{m}(t - t_0) + v_{0y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dr_x &= \left(\frac{F_x}{m}(t - t_0) + v_{0x}\right) dt \\ dr_y &= \left(\frac{F_y}{m}(t - t_0) + v_{0x}\right) dt \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \int_{r_{0x}}^{r_x} dr_x &= \int_{t_0}^t \left(\frac{F_x}{m}(t - t_0) + v_{0x}\right) dt \\ \int_{r_{0y}}^{r_y} dr_y &= \int_{t_0}^t \left(\frac{F_y}{m}(t - t_0) + v_{0y}\right) dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_x - r_{0x} &= \frac{F_x}{2m}(t - t_0)^2 + v_{0x}(t - t_0) \\ r_y - r_{0y} &= \frac{F_y}{2m}(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0) \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusion, nous pouvons constater que ce système, qui peut s'écrire de manière condensée

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{F} \frac{(t - t_0)^2}{2m} + \vec{v}_0(t - t_0)}$$

se présente comme deux équations dépendant d'un paramètre commun : le temps. On pourra donc faire abstraction du temps pour dessiner la trajectoire du projectile sur un plan Oxy . Nous allons effectuer ce calcul pour le cas simplifié $t_0 = 0$, $\vec{r}_0 = \vec{0}$ et $\vec{v}_0 = \vec{0}$. On a

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} r_x(t) &= \frac{F_x}{2m} t^2 \\ r_y(t) &= \frac{F_y}{2m} t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 &= \frac{2m r_x}{F_x} \\ t^2 &= \frac{2m r_y}{F_y} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \frac{2m r_x}{F_x} &= \frac{2m r_y}{F_y} \\ \Leftrightarrow r_y &= \frac{F_y}{F_x} r_x \end{aligned}$$

En posant $m = \frac{F_y}{F_x}$, on constate que la trajectoire du projectile considéré sera bien rectiligne, étant donné que nous avons l'équation d'une droite passant par l'origine.

$$\Leftrightarrow r_y = m r_x$$

chute libre d'un corps

Nous avons dans le cas particulier d'un corps soumis à la gravité l'équation

$$m \vec{a}(t) = m \vec{g} \Leftrightarrow \vec{a}(t) = \vec{g}$$

Cette équation est, ici aussi, identique à celle considérée en cinématique :

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{g} \frac{(t-t_0)^2}{2} + \vec{v}_0(t-t_0)}$$

10.2.3 Mouvement circulaire uniforme (MCU)

Soit un yo-yo de masse m tournant autour d'un doigt à vitesse $\|\vec{v}(t)\|$ constante. Pour retenir le yo-yo dans sa trajectoire, le fil est soumis à une tension $\vec{T}(t)$ exprimée en Newtons. On a l'équation du mouvement

$$m \vec{a}(t) = \vec{T}(t) \parallel \vec{a}(t)$$

où $\vec{T}(t)$ est la tension dans le fil et $\vec{a}(t)$ est l'accélération subie par le yo-yo.

Comme lors de l'étude du mouvement en cinématique, nous allons introduire les vecteurs $\vec{1}_n(t)$ et $\vec{1}_t(t)$ tels que

$$\vec{1}_n(t) = \cos \omega(t-t_0) \vec{1}_x + \sin \omega(t-t_0) \vec{1}_y$$

et

$$\vec{1}_t(t) = -\sin \omega(t - t_0)\vec{1}_x + \cos \omega(t - t_0)\vec{1}_y$$

où ω (*rad/s*) est la vitesse angulaire et t_0 est l'instant initial.

On sait que

$$\vec{r}(t) = R \vec{1}_n$$

où R est ici le rayon de courbure de la trajectoire, autrement dit, le rayon du cercle décrit par le yo-yo. On a, en appliquant deux dérivations successives

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R \frac{d\vec{1}_n}{dt} = R\omega \vec{1}_t$$

et

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = R\omega \frac{d\vec{1}_t}{dt} = -R\omega^2 \vec{1}_n$$

car

$$\frac{d\vec{1}_n(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\cos \omega(t - t_0)\vec{1}_x + \sin \omega(t - t_0)\vec{1}_y \right) = -\omega \sin \omega(t - t_0)\vec{1}_x + \omega \cos \omega(t - t_0)\vec{1}_y = \omega \vec{1}_t$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{1}_n(t)}{dt^2} &= \frac{d\vec{1}_t(t)}{dt} \\ &= \omega \frac{d}{dt} \left(-\sin \omega(t - t_0)\vec{1}_x + \cos \omega(t - t_0)\vec{1}_y \right) \\ &= -\omega^2 \cos \omega(t - t_0)\vec{1}_x - \omega^2 \sin \omega(t - t_0)\vec{1}_y = -\omega^2 \vec{1}_n \end{aligned}$$

Les équations du mouvement du yo-yo nous seront donc données par

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= R\vec{1}_n(t) \\ \vec{v}(t) &= R\omega \vec{1}_t(t) \\ \vec{a}(t) &= -R\omega^2 \vec{1}_n(t) \end{aligned}$$

La force centrifuge

La force centrifuge est une force fictive utilisée en physique dans le contexte de l'étude du mouvement des objets dans des référentiels non inertiels, car en rotation par rapport à un référentiel galiléen.

Par exemple, une personne est dans une voiture, et cette voiture démarre brusquement. La personne sent une force qui la plaque contre le dossier, elle subit la force d'inertie. Considérons maintenant un observateur extérieur : il verra juste un effet de l'inertie : lorsque la voiture démarre, la personne assise est immobile et est donc « rattrapée » par son dossier, et c'est la pression exercée par le dossier sur la

personne qui va mettre celle-ci en mouvement, qui va la pousser et faire qu'elle se déplace à la même vitesse que le reste de la voiture. Il s'agit d'une force fictive.

En mécanique newtonienne, l'équation du mouvement $\vec{F} = m \vec{a}$ ne s'applique que dans un référentiel inertiel. Il est parfois utile ou plus simple de traiter un problème dans un référentiel qui est non-inertiel.

Quand on fait ce choix, on peut faire abstraction du caractère non inertiel du référentiel à condition de rajouter des forces supplémentaires dans le problème. On utilise alors cette équation mais en incluant dans le terme de force des forces supplémentaires qu'on appelle en conséquence des forces fictives.

Une force est un modèle destiné à représenter une interaction ; quelle que soit la nature de l'interaction, celle-ci est représentée par un vecteur ayant un point d'application, une direction, un sens et une intensité. C'est le cas des interactions de contact (pression, frottement) ou à distance (poids, force électrostatique, force de Lorentz).

En ce sens, les forces d'inertie ne résultent pas d'une interaction (c'est-à-dire de l'action d'un l'objet sur un autre) mais juste du choix du référentiel, ce ne sont donc pas à proprement parler des forces mais un simple artifice de calcul.

Cependant, si l'on définit une force par son effet, c'est-à-dire par l'accélération ou la déformation qu'elle produit, alors les forces d'inertie sont bien des forces

Les effets de ces forces fictives sont parfaitement perceptibles depuis le référentiel non inertiel dans le sens où elles sont rajoutées justement pour que la perception qu'un observateur a du mouvement des objets depuis ce référentiel soit cohérente avec la Loi de Newton. Néanmoins, il faut les distinguer des autres forces fondamentales en ce sens que ces forces sont elles indépendantes du référentiel.

La force centrifuge est utilisée dans le cas particulier des référentiels décrivant une trajectoire circulaire. Un référentiel en rotation est bien non-inertiel étant donné qu'il décrit une trajectoire qui indique qu'il est soumis à une accélération. Sans cette rotation, il décrirait un mouvement rectiligne uniforme.

Si on étudie le mouvement d'un objet dans un référentiel tournant, on peut dès lors utiliser l'équation $\vec{F} = m \vec{a}$ à condition de rajouter, notamment, une force centrifuge comme agissant sur l'objet.

Si, de plus, depuis le référentiel tournant, l'objet est perçu comme à l'équilibre ($\vec{a} = 0$), alors la force centrifuge est la seule force fictive qu'il est nécessaire de rajouter. C'est par exemple le cas pour des référentiels attachés à des objets en rotation étant donné que si le référentiel est attaché à l'objet, l'objet y est perçu en équilibre, puisqu'il n'y est pas perçu en mouvement. Dans le cas contraire, il convient de rajouter une autre force fictive, la force de Coriolis.

L'expression de la force centrifuge à rajouter est

$$\|\vec{F}\| = m \frac{v^2}{R}$$

où

- m est la masse de l'objet étudié.
- v est la vitesse du référentiel tournant.
- R est le rayon de courbure de la trajectoire du référentiel.
- toutes mesurées depuis un seul et même référentiel non-inertiel.

Idées fausses

- La force centrifuge serait la réaction à la force centripète.
- La force centrifuge n'obéirait pas au principe d'action-réaction.
- La force centrifuge serait une force comme les autres.

10.2.4 Mouvement circulaire accéléré : cas général

Soit un yo-yo de masse m tournant autour d'un doigt à vitesse $\|\vec{v}(t)\|$ non constante. Pour retenir le yo-yo dans sa trajectoire, le fil est soumis à une tension $\vec{T}(t)$ exprimée en Newtons. On a l'équation du mouvement

$$m \vec{a}(t) = \vec{T}(t) \parallel \vec{a}(t)$$

où $\vec{T}(t)$ est la tension dans le fil et $\vec{a}(t)$ est l'accélération subie par le yo-yo.

Nous allons ici aussi introduire les vecteurs $\vec{1}_n(t)$ et $\vec{1}_t(t)$ tels que

$$\vec{1}_n(t) = \cos \theta(t) \vec{1}_x + \sin \theta(t) \vec{1}_y$$

et

$$\vec{1}_t(t) = -\sin \theta(t) \vec{1}_x + \cos \theta(t) \vec{1}_y$$

où θ (rad) est l'angle en fonction du temps et t_0 est l'instant initial. On suppose $\theta(t_0) = 0$.

On sait que

$$\vec{r}(t) = R \vec{1}_n(t)$$

où R est ici le rayon de courbure de la trajectoire, autrement dit, le rayon du cercle décrit par le yo-yo. On a, en appliquant deux dérivations successives

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R \frac{d\vec{1}_n}{dt} = R\dot{\theta} \vec{1}_t$$

avec $\dot{\theta} = \frac{d\theta(t)}{dt}$ et

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = R \frac{d\dot{\theta} \vec{1}_t}{dt} = -R\theta^2 \vec{1}_n + R\ddot{\theta} \vec{1}_t$$

car

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{1}_n(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\cos \theta(t) \vec{1}_x + \sin \theta(t) \right) \vec{1}_y = -\dot{\theta} \sin \theta(t) \vec{1}_x + \dot{\theta} \cos \theta(t) \vec{1}_y = \dot{\theta} \vec{1}_t \\ \frac{d^2 \vec{1}_n(t)}{dt^2} &= \frac{d \vec{1}_t}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(-\dot{\theta} \sin \theta(t) \vec{1}_x + \dot{\theta} \cos \theta(t) \vec{1}_y \right) \\ &= -\ddot{\theta} \cos \theta(t) \vec{1}_x - \dot{\theta}^2 \sin \theta(t) \vec{1}_x - \ddot{\theta} \sin \theta(t) \vec{1}_y + \dot{\theta}^2 \cos \theta(t) \vec{1}_y \\ &= -\ddot{\theta} \vec{1}_n + \dot{\theta}^2 \vec{1}_t \end{aligned}$$

Avec l'accélération angulaire $\ddot{\theta}(t)$ *rad/s²*, les équations du mouvement du yoyo nous seront donc données par

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= R \vec{1}_n(t) \\ \vec{v}(t) &= R \dot{\theta}(t) \vec{1}_t(t) \\ \vec{a}(t) &= -R \ddot{\theta}(t) \vec{1}_n(t) + R \dot{\theta}^2(t) \vec{1}_t(t) \end{aligned}$$

Où on voit que l'accélération tangentielle n'est pas nulle, puisque la norme de la vitesse varie avec le temps.

Nous pourrions aussi déterminer, de cette manière, un mouvement elliptique (c'est-à-dire décrivant une ellipse, comme par exemple les planètes tournant autour du soleil) en considérant que le rayon R varie et dépend du temps ($\vec{R} = \vec{R}(t)$). Nous aurons donc, comme équations paramétriques de la trajectoire elliptique :

$$\begin{cases} R_x(t) = A \cos \theta(t) \\ R_y(t) = B \sin \theta(t) \end{cases}$$

où A et B sont les longueurs des deux demi grands axes de l'ellipse.

Le calcul est laissé comme exercice à la discrétion du lecteur envious de s'améliorer. Notons que les équations de la trajectoire sont établies par rapport au centre de l'ellipse. Cependant, lors de l'étude d'une planète tournant autour du soleil, le soleil occupe un des foyers de l'ellipse et pas son centre.

10.2.5 La parabole de tir (MRU + MRUA)

Lorsque l'on projette un caillou en essayant de le jeter le plus loin possible, le projectile décrit, dans l'espace, une courbe qui ressemble à une cloche. Si le corps est lancé du point P de coordonnées (r_{0x}, r_{0z}) avec une vitesse initiale \vec{v}_0 décrivant un angle α avec l'horizontale, son mouvement $\vec{r}(t)$ sera décomposé en un mouvement horizontal $r_x(t)$ (selon l'axe Ox) et un mouvement vertical $r_z(t)$ (selon l'axe Oz). Nous allons étudier ces deux mouvements perpendiculaires, $r_x(t)$ et $r_z(t)$, indépendamment.

Soit

$$\begin{aligned} \vec{F} = \vec{G} &= -\|\vec{G}\| \vec{1}_z \\ \vec{v}_0 &= \|\vec{v}_0\| \cos \alpha \cdot \vec{1}_x + \|\vec{v}_0\| \sin \alpha \cdot \vec{1}_z = v_{0x} \cdot \vec{1}_x + v_{0z} \cdot \vec{1}_z \end{aligned}$$

et

$$\tan \alpha = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}$$

On a

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= r_x(t) \cdot \vec{1}_x + r_z(t) \cdot \vec{1}_z \\ \vec{v}(t) &= v_x(t) \cdot \vec{1}_x + v_z(t) \cdot \vec{1}_z \\ \vec{a}(t) &= a_x(t) \cdot \vec{1}_x + a_z(t) \cdot \vec{1}_z\end{aligned}$$

Nous savons que le corps, dans la direction x , n'est soumis à aucune force : $F_x = 0$. Le mouvement du corps selon x sera donc un mouvement rectiligne uniforme (MRU) vu qu'aucune accélération selon x ne perturbera le mouvement selon x .

Dans la direction Oz , le corps est soumis à la gravité : $\vec{G} = -m g \vec{1}_z$. Le mouvement du corps selon z sera donc un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) vu qu'aucune autre force ne vient perturber la chute. Par contre, la vitesse $v_z(t) = -gt + v_{0z}$ du mobile sera proportionnelle au temps t .

On a, en remplaçant dans l'équation $m \vec{a} = \vec{F}$,

$$m \vec{a}(t) = -m g \vec{1}_z$$

Donc,

$$\begin{aligned}&\begin{cases} m a_x(t) = 0 \\ m a_z(t) = -m g \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_z(t) = -g(t - t_0) + v_{0z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} r_x(t) = v_{0x}(t - t_0) + r_{0x} \\ r_z(t) = -g \frac{(t - t_0)^2}{2} + v_{0z}(t - t_0) + r_{0z} \end{cases}\end{aligned}$$

Pour $t_0 = 0$ et $\vec{r}_0 \equiv (r_{0x}, r_{0y}) = (0, 0)$, nous avons les équations

$$\begin{cases} r_x(t) = v_{0x}t \\ r_z(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_{0z}t \end{cases}$$

Donc, si l'on élimine t , on trouve

$$r_z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} r_x^2 + r_x \tan \alpha$$

Cette équation est celle d'une parabole passant par l'origine et dont la concavité est tournée vers le bas et présentant un axe de symétrie verticale. La norme v_0 de la vitesse initiale \vec{v}_0 et l'angle de lancement α sont suffisants pour déterminer entièrement le mouvement décrit par le mobile.

Ici aussi, nous pouvons définir la portée, l'angle de tir optimal, la hauteur atteinte par le projectile, le temps de parcours, ... de manière identique à ce qui a été fait lors de l'étude cinématique d'un projectile.

10.2.6 chute libre d'un corps avec frottements

Parler de dynamique sans introduire les équations différentielles du 2^{eme} ordre et les forces de frottement \vec{F}_{fr} serait un peu, mutatis mutandi, comme marcher dans des rues sans déjections canines. Le modèle serait trop parfait et trop simpliste, par conséquent inadapté à la réalité.

Avec la force de gravitation \vec{G} , on a l'équation de Newton

$$m \vec{a}(t) = \vec{G} + \vec{F}_{fr}(t)$$

En introduisant que les forces de frottements $\vec{F}_{fr}(t)$ dans le milieu sont proportionnelles à la vitesse $\vec{v}(t)$, il vient

$$m \vec{a}(t) = m \vec{g} - k \vec{v}(t)$$

Comme nous travaillons dans un espace à 1 dimension (le corps ne peut que descendre ou monter), nous utiliserons l'équation différentielle simplifiée, en considérant que le corps chute et que donc, sa vitesse est orientée vers le bas par rapport à l'axe Oz de référence, qui est orienté vers le haut.

De plus, nous savons que les forces de frottement s'opposent à la vitesse et donc, si le corps chute ($v(t) < 0$), elles seront dirigées vers le haut. On aura l'équation

$$m a(t) = -m g - k v(t)$$

Qui peut encore s'écrire

$$\ddot{r} + \frac{k}{m} \dot{r} = -g$$

Il s'agit d'une équation différentielle² inhomogène du 2^{eme} ordre. Lorsque l'équation différentielle possède un second membre (ici, $-g$ est une fonction non nulle), il reste possible d'exploiter ce qui suit. L'équation obtenue en remplaçant $-g$ par la fonction nulle est appelée équation homogène associée à l'équation différentielle. On la suppose résolue : y_{SGh} représente la solution générale de l'équation homogène.

Pour trouver la solution de l'équation différentielle non homogène, il suffit alors de trouver une solution de l'équation avec second membre : y_{SPnh} , pour les connaître toutes. En effet, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $y_{SPnh} + y_{SGh}$ où y_{SGh} est la solution générale de l'équation homogène associée.

On cherche des solutions homogènes de $\ddot{r} + \frac{k}{m} \dot{r} = -g$ sous forme exponentielle, c'est-à-dire telles que $r(t) = e^{\lambda t}$. Une telle fonction sera solution de l'équation différentielle si et seulement si λ est solution de

²Une équation différentielle est une équation dans laquelle la ou les inconnue(s) ne sont pas des nombres mais des fonctions. Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I revient donc à chercher toutes les fonctions f dérivables sur I qui vérifient l'équation différentielle proposée.

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda = 0$$

Cette équation est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle.

Pour des équations différentielles homogènes du 2^{eme} ordre de la forme

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad (\text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels, } a \text{ non nul})$$

l'équation caractéristique de l'équation différentielle sera donnée par

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Comme pour toute équation du second degré, trois cas se présentent selon le signe du discriminant.

1. Si $\Delta > 0$

L'équation possède deux solutions λ_1 et λ_2 .

L'équation possède au moins deux fonctions exponentielles solutions $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$. On démontre que ces deux solutions engendrent l'ensemble des solutions. C'est-à-dire que l'ensemble des solutions sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

où C_1 et C_2 sont deux réels quelconques.

Pour déterminer ces deux constantes, il est naturel de donner deux informations sur la fonction

- cela se fait en général en donnant des conditions initiales en un point x_0 , c'est-à-dire en précisant les valeurs y_0 et y'_0 de $y(x)$ et $y'(x)$ à cet instant. Dans ce cas l'existence et l'unicité de la solution vérifiant ces conditions initiales sont garanties.
- pour de nombreux problèmes physiques, il est fréquent de donner des conditions aux limites en précisant les valeurs y_1 et y_2 aux « instants » x_1 et x_2 . Il y a alors fréquemment existence et unicité des solutions, mais ce n'est pas toujours vrai.

2. Si $\Delta = 0$

L'équation ne possède qu'une seule solution λ^* . On démontre alors que l'ensemble des solutions sont les fonctions y définies sur \mathbb{R} par

$$y(x) = (Ax + B)e^x$$

où A et B sont des réels quelconques.

Pour déterminer A et B , il faut, comme dans le cas précédent posséder deux conditions initiales sur y .

3. Si $\Delta < 0$

L'équation ne possède pas de solutions réelles mais deux solutions complexes : λ_1 et λ_2 conjuguées l'une de l'autre.

Il est alors utile de faire une incursion dans les fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} . Les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ définie par $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sont des solutions de l'équation dans cet ensemble. On démontre alors que l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies par $y(x) = C_1 e^{\lambda_1(x)} + C_2 e^{\lambda_2(x)}$ où C_1 et C_2 sont deux complexes quelconques.

On démontre alors qu'elles engendrent l'ensemble des solutions à valeurs dans \mathbb{R} c'est à dire que cet ensemble est formé des fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$y(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$$

où A et B sont deux réels quelconques et $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$.

Pour déterminer A et B , il faut, comme dans les cas précédents posséder deux conditions initiales sur y .

Cependant, notre équation de la chute d'un corps $\ddot{r}(t) + \frac{k}{m} \dot{r}(t) = -g$ peut encore s'écrire, en considérant que $\dot{r}(t) = v(t)$ et $\ddot{r}(t) = \dot{v}(t)$,

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v = -g$$

Les solutions de l'équation homogène $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = 0$ associée peuvent se déduire de la procédure d'intégration suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}v \\ \Rightarrow \frac{dv}{v} &= -\frac{k}{m}dt \\ \Rightarrow \int_{v_0^*}^v \frac{dv}{v} &= -\frac{k}{m} \int_{t_0}^t dt \\ \Leftrightarrow \ln \frac{v}{v_0^*} &= -\frac{k}{m}(t - t_0) \\ \Leftrightarrow \ln \frac{v}{v_0^*} &= -\frac{k}{m}(t - t_0) \\ \Leftrightarrow \frac{v}{v_0^*} &= e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation homogène peut finalement s'écrire

$$v_{SGh}(t) = v_0^* e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}$$

La solution particulière de l'équation inhomogène $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g$ nous sera donnée par

$$v_{SPnh}(t) = -\frac{m}{k}g$$

car on peut vérifier que $\frac{dv_{SPnh}(t)}{dt} + \frac{k}{m}v_{SPnh}(t)$ est bien égal à $-g$.

Donc, la vitesse instantannée du projectile en chute libre nous sera donnée par, avec $v(t_0) = v_0$,

$$v(t) = v_{SGh}(t) + v_{SPnh}(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{k}$$

En intégrant la vitesse par rapport au temps, nous obtenons la trajectoire $r(t)$ du corps. Nous avons l'équation

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v(t) \\ \Rightarrow dr &= \left(\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{k}\right) dt \\ \Rightarrow \int_{r_0^*}^r dr &= \int_{t_0}^t \left(\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{k}\right) dt \\ \Leftrightarrow r - r_0^* &= -\frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{k}(t - t_0) \end{aligned}$$

Et, avec $r(t_0) = r_0$, nous avons finalement, pour l'équation de la trajectoire de la chute d'un corps

$$r(t) = -\frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}\right) - \frac{mg}{k}(t - t_0) + r_0$$

10.2.7 La parabole de tir avec frottements

Avec la force de gravitation \vec{G} , on a l'équation de Newton

$$m \vec{a}(t) = \vec{G} + \vec{F}_{fr}(t)$$

En introduisant que les forces de frottements $\vec{F}_{fr}(t)$ dans le milieu sont proportionnelles à la vitesse $\vec{v}(t)$, il vient

$$m \vec{a}(t) = m \vec{g} - k \vec{v}(t)$$

Comme nous travaillons cette fois dans un espace à 2 dimension, nous utiliserons un système de deux équations différentielles, en considérant que le corps chute dans la direction z .

De plus, nous savons que les forces de frottement s'opposent à la vitesse et donc, si le corps chute, elles seront dirigées vers le haut. On aura les équations

$$\begin{cases} m a_x(t) = -k v_x(t) \\ m a_z(t) = -m g - k v_z(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x(t) = -\frac{k}{m} v_x(t) \\ a_z(t) = -g - \frac{k}{m} v_z(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v}_x(t) = -\frac{k}{m} v_x(t) \\ \dot{v}_z(t) = -g - \frac{k}{m} v_z(t) \end{cases}$$

En appliquant ce que nous avons obtenu au paragraphe précédent, nous obtenons

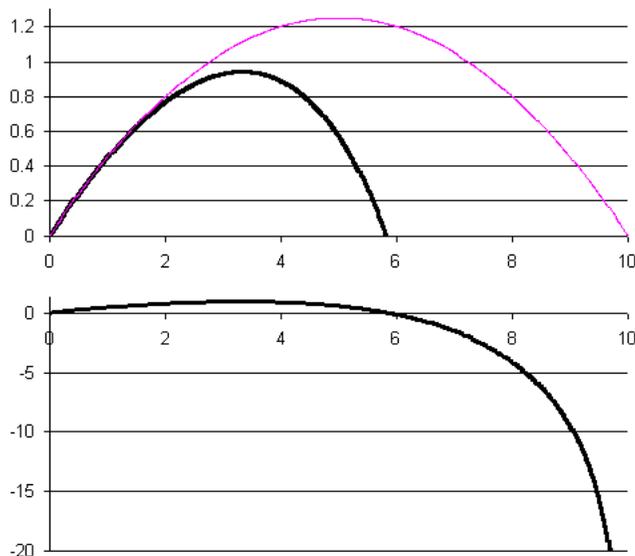


FIG. 10.2 – (en haut) Courbe décrite par le projectile en présence de forces de frottements : comparaison avec la parabole de tir sans forces de frottements. (en bas) Courbe décrite par le projectile : nous pouvons voir que, sous l'axe Ox , le projectile se rapproche d'une asymptote verticale située en $r_x = \frac{m v_0}{k}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} \\ v_z(t) = (v_{0z} + \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{k} \end{cases}$$

Donc, les équations paramétriques de la trajectoire seront données par

$$\begin{cases} r_x(t) = \frac{m}{k} v_{0x} (1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}) + r_{0x} \\ r_z(t) = \frac{m}{k} (v_{0z} + \frac{mg}{k}) (1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}) - \frac{mg}{k} (t - t_0) + r_{0z} \end{cases}$$

Dans le cas particulier des conditions initiales $t_0 = 0$, $\vec{r}_0 = \vec{0}$, on a

$$\begin{cases} r_x(t) = \frac{m}{k} v_{0x} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \\ r_z(t) = \frac{m}{k} (v_{0z} + \frac{mg}{k}) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k} t \end{cases}$$

Donc, on peut écrire

$$t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{k r_x}{m v_{0x}} \right)$$

En remplaçant dans la deuxième équation, nous obtenons

$$r_z = \left(v_{0z} + \frac{m g}{k} \right) \frac{r_x}{v_{0x}} + \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{k r_x}{m v_{0x}} \right)$$

qui n'est plus l'équation d'une parabole, mais qui passe toujours par l'origine $(0, 0)$ des axes (voir 10.2 où nous avons utilisé les valeurs $g = 10 \text{ m/s}^2$, $m = 1 \text{ kg}$, $\vec{v}_0 \equiv (10, 5) \text{ m/s}$ et $k = 1 \text{ kg/s}$).

10.2.8 Poids et forces de gravitation

La gravitation est le phénomène par lequel deux corps massifs quelconques s'attirent. La force exprimant l'attraction gravitationnelle s'écrit alors

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{1}_{12}$$

où

- \vec{F}_{12} étant la force gravitationnelle exercée par le corps 1 sur le corps 2 (en newton) ;
- G , la constante gravitationnelle, qui vaut $6,6742 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.
- m_1 et m_2 , les masses des deux corps en présence (en kilogrammes).
- R , la distance entre les 2 corps (en mètres).
- $\vec{1}_{12}$ est un vecteur unitaire dirigé du corps 1 vers le corps 2.
- Le signe $-$ indique que le corps 2 est attiré par le corps 1.

Donc, comme $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, on peut écrire que

$$m_1 \vec{a}_1(t) = -m_2 \vec{a}_2(t)$$

Le problème à 2 corps

Le problème à deux corps est un point de départ de la mécanique classique, et un sujet essentiel de la mécanique céleste. Il concerne l'étude du mouvement relatif de deux points matériels P_1 et P_2 affectés de masses respectives m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle.

Si le système est supposé isolé dans l'espace, les points P_1 et P_2 décrivent par rapport au centre de masse des ellipses homothétiques dont l'un des foyers (immobile) est le centre de masse. Les caractéristiques (excentricité, position du second foyer) s'expriment en fonction de la masse réduite μ et de la masse totale $M_t = m_1 + m_2$. Ce résultat, loin d'être scolaire, est employé dans la détection des planètes extrasolaires.

On pose :

- $\vec{r} = P_1 \vec{P}_2$
- \vec{F}_{12} la force de P_1 sur P_2
- C le centre de masse de P_1 et P_2
- $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ où m_1 et m_2 sont les masses respectives des points P_1 et P_2

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

- $\vec{r} = \vec{C}P$
- le point P subit la force \vec{F}_{12} . En effet, le principe fondamental de la dynamique est vérifié :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

- La vitesse de P vaut $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

Le problème est donc ramené à un mouvement à « force centrale ». Un mouvement à force centrale est le mouvement d'un point matériel P , soumis uniquement à une force centrale, c'est-à-dire une force toujours dirigée vers le même point noté C , appelé centre de force, qui est ici le centre de masse du système des deux corps.

Dans les cas simplifiés où nous supposons les orbites des deux corps circulaires (et pas elliptiques), nous aurons les deux cas particuliers suivants de MCU :

- si $m_1 = m_2$, les deux corps décriront la même trajectoire circulaire autour du centre de masse C .
- si $m_1 \gg m_2$, le corps P_2 décrira une trajectoire circulaire autour du centre de masse C , quasi confondu avec le corps P_1 , qu'on pourra supposer immobile.

Interactions fondamentales

Isaac Newton en 1684 utilise pour la première fois cette loi de gravitation universelle, mais pour des astres supposés ponctuels. Il découvre que tout en astronomie s'en déduit, et qu'il peut même appliquer sa loi à la pesanteur, unifiant ainsi la mécanique terrestre et la mécanique céleste. Il demandera à Halley un délai pour mettre « tout ce fatras » au propre : ce qui exigera de sa part un effort colossal. En 1687, paraîtront les *Principia*, qui est un monument de la pensée humaine : des dizaines de théorèmes y sont démontrés, montrant la voie pour la recherche du XVIII^{ème} siècle. Pour la première fois, est mise pleinement en acte la pensée de Galilée : le grand livre de la Nature peut s'expliquer par les mathématiques. Ainsi peut-on considérer Newton comme le fondateur de la physique mathématique. Tous ses rivaux (Hooke, Huygens, etc.) sont relégués à « l'avant Newton », un peu comme après 1905, on parlera de « avant/après Einstein ». Mais cela est, à l'instar d'Einstein, à nuancer et Newton reprendra à son compte une parole de Nicole Oresme : « Si j'ai pu voir un peu au-delà, c'est que j'étais porté par des épaules de géants ». Il est clair que la loi en $1/r^2$ est déjà connue de Hooke, Halley, etc, mais personne ne l'a énoncée ainsi.

Les Principia sont très difficiles à lire : il fallait pour suivre le cheminement de la pensée de Newton comprendre « l'ultime raison », le 0/0 du calcul infinitésimal. Évidemment, en tant qu'inventeur du calcul infinitésimal, Newton possédait une certaine avance sur ses contemporains.

D'autre part, Newton franchit un Rubicon qui provoquera les tollés de l'élite scientifique de l'époque. Explicitement, il rétablit en physique cette chose « interdite » depuis Aristote : l'action instantanée à distance. Les cartésiens refuseront cela, et le temps de réception des travaux de Newton en France et en Allemagne sera très long (presque 30 ans). Newton lui-même a essayé de trouver la cause de la gravitation, en vain.

Vers 1900, on sait qu'il reste à expliquer un résidu dans la précession de la trajectoire de la planète Mercure autour du Soleil. Einstein expliquera ces fameuses 43 secondes d'arc par siècle, en inventant sa théorie de la gravitation appelée relativité générale en 1915. La loi de Newton n'était qu'une approximation (très bonne) de la réalité, mais incapable de s'appliquer aux trous noirs, ou à la « chute de la lumière ».

On découvrira ainsi qu'il existe trois autres forces fondamentales en physique :

- la force électromagnétique (courants électriques, aimants,...),
- l'interaction faible,
- l'interaction forte (cohésion des noyaux).

ces trois dernières forces fondamentales pouvant, à ce jour, être unifiées via certaines théories modernes.

D'une façon générale il est naturel en physique de chercher à unifier la description des interactions. James C. Maxwell le premier a effectué l'unification des phénomènes magnétique et électriques avec sa théorie de l'électromagnétisme. Avec l'avènement de la mécanique quantique et le développement de la version quantique de l'électromagnétisme appelée électrodynamique quantique il a été possible de mélanger cette dernière avec l'interaction faible plus récemment découverte au sein de la théorie électrofaible. La découverte par la suite de la chromodynamique quantique expliquant la structure du noyau atomique en terme des quarks sera alors la dernière pièce de l'édifice constitué par le modèle standard qui incorpore les trois interactions dans une théorie unifiée.

10.3 Lois de Kepler et applications de la dynamique

Johannes Kepler (ou Keppler), né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt, près de Stuttgart (Allemagne) et mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne en Bavière, est un astronome célèbre pour avoir étudié et confirmé l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic mais surtout pour avoir découvert que les planètes ne tournaient pas en cercle parfait autour du Soleil mais en suivant des ellipses. Il a découvert les relations mathématiques (dites Lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leurs orbites. Ces relations sont fondamentales car elles furent plus tard exploitées par Isaac Newton pour élaborer la théorie de la gravitation universelle. Notons toutefois, que si Kepler avait vu juste quant à la forme des orbites planétaires, il expliquait les mouvements des planètes non pas par la gravité mais par le magnétisme. Il a enfin accordé une attention majeure à l'optique en synthétisant en 1604 les principes fondamentaux de l'optique moderne comme la nature de la lumière, la chambre obscure, les miroirs (plans et courbes), les lentilles ou la réfraction.

Kepler naît au sein d'une famille de religion protestante luthérienne, installée dans la ville de Weil-der-Stadt en Allemagne (Baden-Württemberg). Né prématurément à sept mois et hypocondriaque de nature chétive, il souffrit toute sa vie d'une santé fragile. À l'âge de trois ans, il contracte la petite vérole, ce qui, entre autres séquelles, affaiblira sévèrement sa vue.

Kepler vécu dans une famille peu ordinaire dont l'ambiance n'est pas des plus saines. Son père, Heinrich Kepler, était mercenaire dans l'armée du Duc de Württemberg et, toujours en campagne, était rarement présent à son domicile. Sa mère, Catherine, qu'il qualifie même de « petite, maigre, sinistre et querelleuse », fut élevée par une tante qui finit sur le bûcher pour sorcellerie. Kepler eut deux autres cadets : Margarete, sa soeur, avec qui il resta proche, et Christopher, qui lui fut toujours antipathique. De 1574 à 1576, il vécut avec son petit frère Heinrich, épileptique, chez ses grands-parents alors que son

père était en campagne et sa mère partie à sa recherche.

Au retour de ses parents, Kepler déménage à Léonberg et entre à l'école latine en 1577. Ses parents lui font découvrir l'astronomie. Ainsi, en 1577 sa mère l'emmène en haut d'une colline pour observer le passage d'une comète. Son père quant à lui, lui montre l'éclipse de Lune le 31 janvier 1580 et comment celle-ci devint toute rouge. Kepler étudia plus tard ce phénomène et l'expliqua dans l'un de ses ouvrages sur l'optique. À nouveau parti en guerre en 1589, son père disparaît à jamais.

Alors que Kepler projetait de devenir ministre luthérien, l'école protestante de Graz demande un professeur de mathématiques. Il abandonne alors ses études en théologie pour prendre le poste et quitte Tübingen en 1594. À Graz, Il publie des almanachs avec des prédictions astrologiques, qui se réalisent, bien qu'il refusait certains de ses préceptes. À l'époque, la distinction entre science et croyance n'était pas encore clairement établie et le mouvement des astres, encore assez méconnu, était gouverné par des lois divines.

En 1615, sa mère, alors âgée de 68 ans, est accusée de sorcellerie. Kepler, persuadé de son innocence, va passer six années à assurer sa défense auprès des tribunaux et écrire de nombreux plaidoyers. Il dut, à deux reprises, retourner dans le Wurtemberg. Elle passa une année enfermée dans la tour de Güglingen aux frais de Kepler ayant échappé de peu à la torture. Finalement, elle fut acquittée le 28 septembre 1621. Affaiblie par ces dures années de procès et d'emprisonnement, elle meurt six mois plus tard.

Kepler meurt en 1630 à Ratisbonne, à l'âge de 59 ans.

En astronomie, les lois de Kepler décrivent les propriétés principales du mouvement des planètes autour du Soleil, sans les expliquer. Elles ont été découvertes par Johannes Kepler à partir des observations et mesures de la position des planètes faites par Tycho Brahé, mesures qui étaient très précises pour l'époque.

Copernic avait soutenu en 1543 que les planètes tournaient autour du Soleil, mais il les laissait sur les trajectoires circulaires du vieux système de Ptolémée hérité de l'antiquité grecque.

Les deux premières lois de Kepler furent publiées en 1609 et la troisième en 1618. Les orbites elliptiques, telles qu'énoncées dans ses deux premières lois, permettent d'expliquer la complexité du mouvement apparent des planètes dans le ciel sans recourir aux épicycliques du modèle ptoléméen.

Peu après, Isaac Newton découvrit en 1687 la loi de l'attraction gravitationnelle (ou gravitation), induisant celle-ci, par le calcul, les trois lois de Kepler.

Première loi : Loi des orbites

Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est un foyer.

Dans le référentiel héliocentrique, le Soleil occupe toujours l'un des deux foyers de la trajectoire ellip-

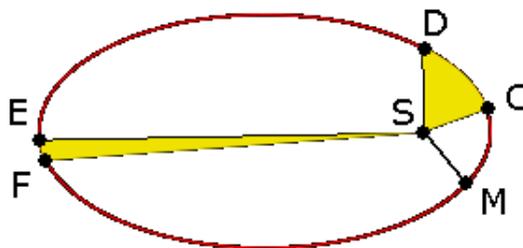


FIG. 10.3 – Illustration de la seconde loi de Kepler.

tique des planètes qui gravitent autour de lui. À strictement parler, c'est le centre de masse qui occupe ce foyer. La plus grande différence est atteinte avec Jupiter qui, du fait de sa masse importante, décale ce centre de masse de $743\,075\text{ km}$, soit $1,07$ rayons solaires. Des déplacements plus importants peuvent être obtenus en cumulant les effets des planètes sur leur orbite. À l'exception de Mercure, les ellipses que décrivent les centres de gravité des planètes ont une très faible excentricité orbitale, et leur trajectoire est quasi-circulaire.

De cette première loi, on déduit par le calcul que le soleil exerce sur une planète une force centripète.

Seconde loi : Loi des aires

Si S est le Soleil et M une position quelconque d'une planète, l'aire balayée par le segment $[SM]$ entre deux positions C et D est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions E et F si la durée qui sépare les positions C et D est égale à la durée qui sépare les positions E et F . La vitesse d'une planète devient donc plus grande lorsque la planète se rapproche du soleil. Elle est maximale au voisinage du rayon le plus court (périhélie), et minimale au voisinage du rayon le plus grand (aphélie).

De cette deuxième loi, on déduit que la force exercée sur la planète est constamment dirigée vers le soleil.

Troisième loi : Loi des périodes

Le carré de la période sidérale T d'un objet (temps entre deux passages successifs devant une étoile lointaine) est directement proportionnel au cube du demi-grand axe a de la trajectoire elliptique de la planète :

$$\frac{T^2}{a^3} = k, \text{ avec } k \text{ constant.}$$

De cette troisième loi, on déduit qu'il existe un facteur constant entre la force exercée et la masse de la planète considérée, qui est la constante de gravitation universelle, ou constante gravitationnelle.

Cette formule avec celles de l'ellipse permettent de calculer les différents paramètres d'une trajectoire elliptique à partir de très peu d'informations. En effet, Johann Lambert (1728 - 1777) montra que la connaissance de trois positions datées permettaient de retrouver les paramètres du mouvement (pour une discussion plus approfondie, voir Lois de Kepler, démonstration ; puis satellites, orbitographie).

10.3.1 Forme newtonienne de la troisième loi de Kepler

Newton comprit le lien entre les lois de la mécanique classique et la troisième loi de Kepler. Il en déduit la formule suivante :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

où :

- T , période de l'objet,
- a , demi grand axe de la trajectoire elliptique,
- G , Constante gravitationnelle,
- m_1 , masse de l'objet 1,
- m_2 , masse de l'objet 2.

Les lois de Kepler ne sont pas seulement applicables aux planètes mais à chaque fois qu'une masse se déplace dans l'espace en orbite autour d'une autre masse. C'est le cas, par exemple, de la Lune et de la Terre ou d'un satellite en orbite autour de celle-ci.

Cette loi n'est cependant applicable que pour des masses importantes suffisamment éloignées. Ainsi, pour le déplacement d'un électron autour du noyau d'un atome, on entre dans le domaine de la physique quantique, qui n'obéit pas aux mêmes lois (celui-ci est beaucoup plus influencé par l'attraction électrostatique que par les forces gravitationnelles).

10.3.2 Application : Découverte de nouveaux corps célestes

Johannes Kepler découvrit ses lois grâce à un travail d'analyse considérable des tables astronomiques établies par Tycho Brahé. En particulier l'étude de Mars lui permit de montrer que le mouvement n'était pas épicyclique mais elliptique.

Ses lois ont permis, elles-mêmes, d'affiner les recherches astronomiques et de mettre en évidence des irrégularités de mouvements de corps connus, par une étonnante progression de l'analyse.

L'exemple le plus spectaculaire fut celui des irrégularités d'Uranus qui permit la « découverte » de Neptune par Le Verrier (1811 - 1877), par le calcul : découverte confirmée par l'observation de Galle (1812 - 1910) en 1846.

Chapitre 11

Travail, puissance, énergie

Dans le sens commun l'énergie désigne tout ce qui permet d'effectuer un travail, fabriquer de la chaleur, de la lumière, de produire un mouvement.

En physique, c'est une grandeur scalaire, exprimée en $\frac{kg\ m^2}{s^2}$ (Joules). L'énergie est la mesure unifiée des différentes formes de mouvement.

11.1 Travail

Le mot travail vient du bas latin tripalium (VI^e siècle) instrument de torture formé de trois pieux. Trois bâtons, deux verticaux et un placé en transversale auquel on attachait les esclaves pour les punir, ou les animaux pour les ferrer ou les soigner. Le mot subit une altération sous l'influence de la famille de trabs, trabis : poutre. (travée)

Au XII^e siècle : Travail = Tourment, souffrance. Travailler = Tourmenter, souffrir. Il désigne ce qu'endure la femme dans l'enfantement.

Au XVI^e siècle : « Se donner de la peine pour ... » Le mot travail est aussi associé à Adam et Ève : le travail serait une sorte de condamnation divine pour avoir tenté de goûter au fruit de la connaissance.

En anglais, travail a donné les mots travel - to travel (voyage - voyager) aux débuts du XIV^e siècle, reflétant certainement la difficulté de se déplacer au Moyen-Age.

Le travail d'une force est l'énergie fournie par cette force lorsque son point d'application se déplace (l'objet subissant la force se déplace ou se déforme). Si par exemple on pousse une voiture, le travail de la poussée est l'énergie produite par cette poussée. Le travail est exprimé en joules (J), et est souvent noté W , initiale du mot anglais *Work* qui signifie travail.

Une force constante \vec{F} qui s'applique sur un objet parcourant un trajet rectiligne \vec{r} fournit une énergie, un travail W

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

où $\vec{F} \cdot \vec{r}$ désigne le produit scalaire des vecteurs \vec{F} et \vec{r} .

On remarque que seule la composante de \vec{F} qui est parallèle à \vec{r} travaille (propriété du produit scalaire : le produit scalaire de 2 forces orthogonales est nul).

Si la force change au cours du trajet, ou si le trajet n'est pas rectiligne, on se ramène à une courte durée dt pendant laquelle la force peut être supposée constante et le trajet parcouru $d\vec{u}$ est considéré comme rectiligne (tangent à la courbe) ; ce travail élémentaire est noté δW et vaut :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

On peut alors obtenir le travail total fourni par la force \vec{F} , en sommant les travaux sur la trajectoire C parcourue par le point d'application de \vec{F} :

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Si la trajectoire est circulaire (par exemple dans le cas où le point d'application d'une force est en rotation autour d'un axe, alors le travail élémentaire du moment résultant vaut $\delta W = \vec{M}_d \cdot d\vec{\theta}$, où \vec{M}_d est le moment de la force par rapport à l'axe, et $d\vec{\theta}$ l'angle parcouru par le solide pendant une courte durée dt .

11.1.1 Cas particuliers

Considérons une force \vec{F} constante s'appliquant sur un objet se déplaçant sur une trajectoire rectiligne. Trois cas particuliers permettent d'illustrer la notion de travail d'une force.

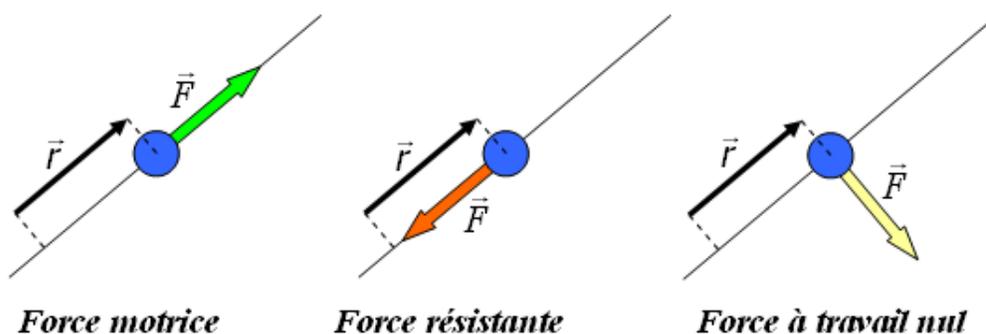


FIG. 11.1 – Illustration des 3 cas particuliers du travail d'une force.

1. Si la force \vec{F} est parallèle au déplacement \vec{r} et orientée dans le même sens, le travail $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = \|\vec{F}\| \|\vec{r}\|$, fourni par la force est positif : la force a augmenté l'énergie du système, celui-ci se déplace donc plus rapidement. On appelle parfois une telle force, une force motrice.

2. Si la force \vec{F} est parallèle au déplacement \vec{r} mais orientée dans le sens opposé, le travail $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = -|\vec{F}| |\vec{r}|$, fourni par la force est négatif : la force a diminué l'énergie du système, celui-ci se déplace donc plus lentement. On appelle parfois une telle force, une force résistante.
3. Si la force \vec{F} est perpendiculaire au déplacement \vec{r} , le travail de la force est nul $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = 0$: la force n'a pas modifié l'énergie du système.

Ce dernier cas ne doit pas laisser penser qu'une force dont le travail est nul n'a aucun effet sur un système. Ainsi, dans le cas d'un solide en mouvement circulaire uniforme, la force centripète a un travail nul. Pour autant, si l'on supprime la force centripète, alors en vertu de la 1^{ère} loi de Newton, le solide cessera son mouvement circulaire et se déplacera en mouvement rectiligne.

La force centripète qui crée l'accélération du même nom est perpendiculaire au mouvement : son travail est nul.

Les forces dont le travail est nul ne modifient pas l'énergie cinétique du solide. En particulier, elles ne modifient pas la norme de la vitesse. Elles peuvent cependant en modifier la direction.

11.2 Energie

Le mot énergie vient du bas latin *energia* qui vient lui-même du grec *ενεργεια* (*energeia*) qui signifie « force en action », par opposition à *δυναμις* (*dynamis*) signifiant « force en puissance ».

Après avoir exploité sa propre force, puis celle des esclaves, des animaux et de la nature (les vents et les chutes d'eau), l'homme a appris à exploiter les énergies contenues dans la nature et capables de lui fournir une quantité croissante de travail mécanique par l'emploi de machines : machines-outils, chaudières et moteurs. L'énergie est alors fournie par un carburant ou énergie fossile.

L'énergie est un concept ancien. L'expérience humaine est que tout travail requiert de la force et produit de la chaleur. Plus on « dépense » de force par quantité de temps, plus vite on peut faire un travail, et plus on s'échauffe.

Comme l'énergie est nécessaire à toute entreprise humaine, l'approvisionnement en énergie est devenu une des préoccupations majeures des sociétés humaines.

Un Grec de l'antiquité possédait en moyenne cinq esclaves. Un ménage moderne avec un compteur électrique de 6 kW possède l'équivalent énergétique de 36 esclaves.

11.2.1 Énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle gravitationnelle (ou énergie gravitationnelle) est le travail nécessaire pour transporter une masse depuis l'infini jusqu'à sa position finale. En pratique, lorsque nous parlerons d'énergie potentielle, nous considérerons des variations de cette énergie par rapport à une référence arbitraire (en général le sol). De plus, pour la distinguer du cas général du travail d'une force, nous adopterons la notation E_p pour l'énergie potentielle.

Les forces conservatives sont, par définition, des forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi. La force de gravitation en est un exemple.

Considérons un corps de masse m se déplaçant, sans frottements, de \vec{r}_0 vers \vec{r}_f dans un repère Oxz , l'axe Oz étant supposé vertical et dirigé dans le sens opposé de la gravité ($\vec{g} = -g\vec{1}_z$). Dans ce cas, le travail du poids vaut

$$W = \vec{G} \cdot \vec{AB} = -m\vec{g} \cdot \vec{r}$$

Si l'on note $(\Delta r_x, \Delta r_z)$ les coordonnées cartésiennes du vecteur déplacement $\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_0$ dans ce repère alors les coordonnées des vecteurs \vec{G} et \vec{r} dans le repère sont les suivantes :

$$\vec{G} = -mg\vec{1}_z \quad \text{et} \quad \vec{r} = \Delta r_x\vec{1}_x + \Delta r_z\vec{1}_z$$

et, par définition du produit scalaire, le travail du poids se simplifie de la façon suivante, en adoptant la notation $W = E_p$:

$$E_p = \vec{G} \cdot \vec{r} = -m g \Delta r_z$$

Le travail du poids d'un corps est donc indépendant du chemin suivi lors de son déplacement, il ne dépend que de la variation d'altitude du centre de gravité de ce corps. À ce propos, remarquons que si le corps s'apprête à « tomber » de \vec{r}_0 à \vec{r}_f , la quantité Δr_z sera négative et l'énergie potentielle E_p positive.

11.2.2 Énergie cinétique

L'énergie cinétique E_c (aussi appelée dans les anciens écrits *vis*, *viva*, ou force vive) est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement. L'énergie cinétique d'un corps est égale au travail nécessaire pour faire passer le dit corps du repos à son mouvement de translation et de rotation actuel.

C'est Guillaume d'Ockham (1280 - 1349) qui a introduit, en 1323, la différence entre ce qu'on appelle le mouvement dynamique (que nous engendrons) et le mouvement cinétique (engendré par des interactions, dont des collisions).

Dans le domaine de validité de la mécanique newtonienne, la notion d'énergie cinétique peut être facilement mise en évidence, pour un corps considéré comme ponctuel (ou point matériel) de masse m constante.

En effet la relation fondamentale de la dynamique $\vec{F} = m \vec{a}$ s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

avec \vec{F} somme des forces appliquées au point matériel de masse m (y compris les forces fictives, dans le cas d'un référentiel non galiléen).

En prenant le produit scalaire membre à membre par la vitesse \vec{v} du corps, il vient :

$$m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

or

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

il vient ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{v^2}{2} \right) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

On met en évidence dans le membre de gauche la quantité

$$\boxed{E_c = m \frac{v^2}{2}}$$

appelée énergie cinétique du point matériel, dont la variation est égale à la somme des puissances $\vec{F} \cdot \vec{v}$ des forces appliquées au corps.

Dans le cas d'un corps que l'on ne peut considérer ponctuel, il est possible de l'assimiler à un système (d'une infinité de) points matériels P_i de masses m_i avec $M = \sum_i m_i$ la masse totale du corps.

L'énergie cinétique E_c du système de points peut être alors simplement définie comme la somme des énergies cinétiques associées aux points matériels constituant le système. On a

$$E_c = \sum_i E_{c,i} = \sum_i m_i \frac{v_i^2}{2}$$

Cette expression est générale et ne préjuge pas de la nature du système, déformable ou pas.

Théorème de l'énergie cinétique

Nous allons, ci-dessous, établir la relation entre travail et énergie cinétique.

Soit un mobile de masse m effectue un MRUA d'accélération \vec{a} constante. On a

$$E_c(t) = m \frac{v^2(t)}{2} = m \frac{(\vec{v}_0 + \vec{a} t)^2}{2} = m \frac{v_0^2(t)}{2} + m \vec{v}_0 \cdot \vec{a} t + m \frac{a^2}{2} = E_{0c} + m a v_0 t = \|\vec{F}\| \|\vec{r}\|$$

où \vec{r} est le déplacement du mobile, v_0 sa vitesse initiale et E_{0c} son énergie initiale. Rappelons qu'il s'agit d'un MRUA et, par conséquent, les vecteurs \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} et \vec{F} sont tous parallèles.

Il vient dès lors que, si le travail effectué lors du déplacement du mobile vaut $W = \|\vec{F}\| \|\vec{r}\|$, on a

$$E_c = E_{0c} + W$$

Autrement dit,

L'énergie cinétique finale d'un objet est égale à son énergie cinétique initiale augmentée du travail total réalisé par toutes les forces qui agissent sur cet objet.

Dans le théorème de l'énergie cinétique, W représente le travail réalisé par toutes les forces qui s'exercent sur le mobile (ou l'objet) considéré. Quand les forces gravitationnelles effectuent un travail, on les représentent séparément et on parle alors d'énergie potentielle E_p .

11.2.3 Autres formes d'énergie

L'énergie est un concept créé par les humains pour quantifier les interactions entre des phénomènes très différents ; c'est un peu une monnaie d'échange commune entre les phénomènes physiques. Ces échanges sont contrôlés par les lois et principes de la thermodynamique. L'unité officielle de l'énergie est le Joule.

Lorsqu'un phénomène entraîne un autre phénomène, l'intensité du second dépend de l'intensité du premier. Par exemple, les réactions chimiques dans les muscles d'un cycliste lui permettent de provoquer le déplacement du vélo. L'intensité de ce déplacement (c'est-à-dire la vitesse) dépend de l'intensité des réactions chimiques des muscles du cycliste, qui peuvent être quantifiées (la quantité de sucre « brûlée » par la respiration, le métabolisme du muscle).

Prenons un exemple plus complexe. Un moteur à explosion fonctionne grâce à une réaction chimique : la combustion (ou « explosion ») qui a lieu à l'intérieur d'un cylindre. La réaction du combustible (l'essence) avec le comburant (l'oxygène de l'air) produit du gaz avec émission de chaleur et de lumière, ce qui se traduit par une augmentation de la température et de la pression dans le cylindre ; la différence de pression entre ce gaz et l'atmosphère de l'autre côté du piston déplace ce dernier, qui va, à travers une transmission mécanique, faire tourner les roues ainsi qu'un alternateur qui va produire de l'électricité. Au passage, il y aura des frottements mécaniques qui produiront un échauffement et une usure.

On a donc un réarrangement des molécules (rupture et recréation de liaisons chimiques) qui provoque une augmentation de la quantité de mouvement des molécules (ce qui se traduit par une augmentation de la température du gaz et donc une augmentation de sa pression). Ce dernier provoque le mouvement d'un solide (le piston), qui va entraîner un système de transmission, et pouvoir ainsi d'une part faire tourner un axe, qui peut être par exemple relié aux roues d'une voiture ou bien à un alternateur. L'entraînement de la pièce mobile de cet alternateur va faire tourner un aimant qui, par induction au sein d'une bobine, va provoquer un déplacement d'électrons (courant électrique).

Le concept d'énergie va permettre de calculer l'intensité des différents phénomènes (par exemple la vitesse de la voiture et la quantité d'électricité produite par l'alternateur) en fonction de l'intensité du phénomène initial (la quantité de gaz et la chaleur produite par la réaction chimique de combustion).

Remarques

- Dans les applications grand public, et notamment dans le domaine de la nutrition, on exprime fréquemment l'énergie en calories ; la calorie est en toute rigueur l'énergie qu'il faut fournir pour faire chauffer un gramme d'eau de un degré Celsius, mais les nutritionnistes nomment par simplification « calorie » ce que les physiciens nomment « kilocalorie ».
- En électricité, on utilise le watt-heure (Wh), énergie consommée pendant une heure par un appareil ayant une puissance d'un watt, ou encore son multiple le kilowattheure (kWh) qui vaut 1 000 Wh. Celui-ci n'est pas très éloigné du travail que peut effectuer un cheval en une heure (736 Wh par convention) excepté en termes de coût, car il revient en France en 2005 à 7 centimes d'euro.
- Pour des raisons thermodynamiques (second principe), toute transformation énergétique réelle est irréversible, ce qui veut dire qu'en inversant l'opération (exemple : retransformer en mouvement via un moteur électrique l'énergie produite par la dynamo d'un vélo) on ne retrouve pas la quantité d'énergie consommée au départ. Cela est lié aux pertes.

L'énergie est donc « quelque chose » qui se conserve, ou se transforme, mais qui n'est autre qu'une grandeur physique, numérique, associée à une situation concrète (par exemple, le mouvement d'un corps pour l'énergie cinétique, une interaction pour une forme d'énergie potentielle, etc.). C'est par le nombre que la notion d'énergie atteint un degré d'objectivité adéquat en physique moderne.

En pratique, on distingue souvent différentes « formes » d'énergie. Toutefois, il faut être conscient que l'énergie sert à mesurer l'intensité d'un phénomène, cette division n'est qu'une manière de faire correspondre l'énergie au phénomène qu'elle mesure. Par ailleurs, cette distinction n'a rien d'absolu, mais dépend uniquement de la position de l'observateur : le principe de relativité s'applique aussi à l'énergie, de sorte que le même phénomène pourra être analysé en terme d'énergie « cinétique », « électromagnétique », ou « potentielle »...

Les formes d'énergie classiquement considérées sont :

- énergie cinétique : l'énergie associée au mouvement d'un corps ou d'une particule ; cela comprend également l'énergie électromagnétique transportée par les photons (lumière, ondes radio, rayons X et γ ...) ou par des particules chargées (énergie électrique) ;
- énergie thermique : l'énergie cinétique d'un ensemble au repos ;

- on peut dire que les autres types d'énergie sont des énergies potentielles : moyennant un petit changement, possible sans travail, un système instable se transforme en un système plus stable, avec dégagement de la différence d'énergie entre les deux systèmes (le plus stable ayant une énergie moindre) :
 - énergie potentielle mécanique (énergie potentielle de gravité ou énergie potentielle élastique) qui forme avec l'énergie cinétique ce qu'on appelle l'énergie mécanique ;
 - énergie potentielle chimique ;
 - énergie potentielle électromagnétique (énergie potentielle électrostatique ou magnétostatique) : position instable d'une ou plusieurs particule(s) chargée(s) dans un champ électromagnétique, par exemple l'énergie stockée dans un condensateur ou dans une bobine électrique ;
 - chaleur latente ;
 - énergie libre.
- énergie fatale : c'est l'énergie inéluctablement présente ou piégée dans un processus ou un produit, qui parfois et pour partie peut être facilement récupérée et valorisée.

Exemple : La France produisait dans les années 2000 plus de 25 millions de *t/an* de déchets ménagers dont 40 %, suite à des retards dans la mise en place du recyclage étaient encore traités par incinération. Le pouvoir calorifique de ces déchets est une forme d'énergie fatale. Sans récupération (récupération de chaleur, méthane, hydrogène et/ou électricité, etc, éventuellement avec co-ou tri-génération, cette énergie serait perdue dans l'environnement (dans les décharges) ou rejetée dans l'atmosphère. La combustion de déchets peut produire de la vapeur qui peut alimenter des serres, des usines ou un réseau urbain de chaleur. La méthanisation des déchets organiques peut produire de substantielles quantités de méthane, et un compost valorisable en agriculture.

Dans la théorie de la relativité, Einstein établit l'existence de deux formes d'énergie seulement :

- énergie cinétique de translation ;
- énergie de masse : masse et énergie au repos sont équivalentes (le fameux $E = mc^2$). Cette forme d'énergie inclut toutes les formes d'énergies précédentes dans la vision classique : un apport d'énergie « classique », telle que la tension d'un arc, augmente la masse du système de façon généralement infime, sauf dans le cadre des réactions nucléaires. Par exemple, lors de fission nucléaire, la masse totale de matière diminue légèrement. La masse « manquante », immatérielle, est sous forme d'énergie cinétique des particules ou énergie thermique. Dans les centrales nucléaires, cette énergie thermique est ensuite récupérée pour la production d'électricité.

11.3 Puissance

En physique, la puissance est la quantité d'énergie par unité de temps fournie par un système à un autre. La puissance correspond donc à un débit d'énergie : deux systèmes de puissances différentes pourront fournir le même travail (la même énergie), mais le système le plus puissant sera le plus rapide.

Dans certains cas, il faut une grande puissance au démarrage (grande énergie sur une courte durée), donc seuls les systèmes puissants peuvent faire fonctionner le dispositif. C'est notamment le cas lorsqu'il faut vaincre un frottement sec ou bien lorsqu'il y a un effet de seuil (comme par exemple la vitesse minimale de décollage d'un avion ou d'une fusée). Une rame de métro nécessitera une puissance d'environ 1 MegaWatt pour se lancer, et 10 à 15 fois moins pour maintenir sa vitesse de croisière.

La puissance est toujours égale au produit d'une grandeur d'effort (force, couple, pression, tension, ...) par une grandeur de flux (vitesse, vitesse angulaire, débit, intensité du courant, ...)

L'unité de puissance du SI est le *watt*, noté W , qui correspond à un joule fourni par seconde.

Les factures d'électricité sont exprimées en *kWh* (kilowatt-heure). Il s'agit d'une unité d'énergie qui équivaut à

$$1 kWh = 10^3 3600 Watts.s = 3,6 10^6 J$$

On utilise encore le cheval vapeur dans le cas des moteurs thermiques ($1 cv = 736 W$ environ).

Toujours dans le domaine automobile, la puissance fiscale, est un paramètre arbitraire défini par l'administration, le rapport avec la puissance réelle n'étant pas univoque. Le calcul prend en compte la cylindrée, le type de carburant, et l'étagement de la boîte des vitesses.

En physique, la puissance moyenne P_m est l'énergie E délivrée par un phénomène divisée par la durée τ de ce phénomène :

$$P_m = \frac{E}{\tau}$$

La puissance instantanée $P(t)$ est la dérivée de l'énergie fournie par rapport au temps :

$$P = \frac{dE}{dt}$$

on a

$$P_m = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t P(t) dt$$

Par abus de langage, on attribue la puissance à l'objet qui la transforme en déplacement, lumière, etc.
Exemple :

- un moteur de 100 *cv*

- une lampe de 100 W

11.3.1 Puissance d'une force

Si le point d'application d'une force \vec{F} (en N) se déplace à la vitesse instantanée \vec{v} (en m/s), alors la puissance instantanée vaut (en $Watt$)

$$P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}(t)$$

On retrouve aisément ce résultat en dérivant le travail d'une force.

11.3.2 Puissance d'un couple

Si l'objet est en rotation sous l'action d'un couple \vec{C} (en Nm) et tourne autour d'un axe parallèle au couple à la vitesse de rotation instantanée $\omega(t)$ (en rad/s), alors la puissance instantanée vaut (en $Watt$)

$$P(t) = \omega(t) \|\vec{C}\|$$

11.4 Conversion énergie(s) - travail

11.4.1 Loi de conservation

L'énergie est une quantité qui se conserve

La notion de conservation est relativement simple à comprendre.

Si on met dans un volume quelque chose et que l'on ferme bien la boîte, l'on s'attend à y retrouver, lorsqu'on l'ouvrira ultérieurement, ce qu'on y a mis. Ceci en physique s'appelle un principe de conservation; la boîte est l'ensemble des phénomènes considérés. Si on ne retrouve pas tout, c'est que une partie a pu sortir sous une forme ou une autre ou même que ce qui manque (ou est en plus) a changé de forme et qu'on ne s'en est pas rendu compte. On a en fait « oublié de mettre un élément dans la boîte », on a négligé d'inclure un phénomène dans le système.

Ce principe est tellement fort en physique qu'à chaque fois qu'il a paru ne pas être vérifié cela a conduit à des découvertes importantes. Chaque fois qu'il a semblé que l'énergie n'était pas conservée, il s'agissait en fait de sa transformation en une nouvelle forme. Par exemple, la radioactivité a un temps été

interprétée comme la réémission de quelque chose qui était reçu de l'extérieur et l'explication est venue de l'équivalence masse énergie.

L'énergie dans un volume est donc d'office conservée, par principe, et si elle diminue dans le volume, c'est qu'une partie en est sortie... ou qu'elle s'est transformée en quelque chose qu'il nous faut identifier : chaleur, masse, rayonnement, etc. La perte d'énergie, même minime, est fréquemment due à sa transformation en énergie thermique.

On est tenté d'écrire :

« L'énergie se transforme d'une forme en une autre, mais ne disparaît jamais. »

La formulation exacte serait :

« Lorsque l'intensité d'un phénomène varie, cela ne peut se faire que par la variation d'un autre phénomène ; la somme des énergies représentant l'intensité de ces phénomènes est une constante. »

Dans les processus radioactifs, le mouvement de la particule éjectée, ou l'impulsion du photon créé, provient de la disparition de la masse ; on écrit souvent par un raccourci que « l'énergie de masse se transforme en énergie cinétique ».

L'énergie d'une réaction chimique correspond à une variation de masse trop infime pour être mesurable, ce qui a fait croire un temps à la conservation de la masse dans les réactions chimiques. De fait, on considère toujours actuellement que la masse se conserve lors d'une réaction chimique, mais l'on sait que c'est une approximation.

11.4.2 Loi de transformation de l'énergie mécanique

La loi de conservation nous apprend qu'en l'absence de pertes ou d'apport extérieur de travail, l'énergie se conserve. Autrement dit, l'énergie mécanique totale E_0 se conserve. Pour un mobile, nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$E_0 = E_{0c} + E_{0p} = E_c(t) + E_p(t)$$

où

- E_0 est l'énergie mécanique du mobile,
- E_{0c} est l'énergie cinétique initiale du mobile,
- E_{0p} est l'énergie potentielle initiale du mobile,
- $E_c(t)$ est l'énergie cinétique du mobile au temps t ,
- $E_p(t)$ est l'énergie potentielle du mobile au temps t ,

Remarquons que nous pouvons aussi écrire

$$E_c(t_1) + E_p(t_1) = E_c(t_2) + E_p(t_2)$$

Etant donné que nous avons déjà défini l'énergie potentielle comme étant un travail, l'énergie cinétique comme étant un finalement un travail elle aussi (théorème de l'énergie cinétique), nous nous arrêtons là en ce qui concerne la loi de transformation.

11.5 Application : Exemple de la chute d'un corps

Pour monter debout sur une chaise de 50 centimètres de haut, une personne de masse 80 kg doit effectuer un travail correspondant à celui de son poids ($\vec{G} = m\vec{g}$) sur une distance h de 50 cm, soit un travail de $m.g.h$ où la masse m vaut 80 kg, g est l'accélération de la gravité (10 m/s^2) et h vaut 0,5 m. Le travail effectué, correspondant à l'énergie mécanique dépensée, vaut donc

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = 80.10.0,5 = 400 \text{ J}$$

Placée à cette hauteur, nous pouvons dire que l'énergie potentielle E_p de la personne est de 400 J. Si celle-ci chute, sa vitesse (nulle avant la chute) augmentera jusqu'à ce qu'elle touche le sol. Etant donné qu'il y a conservation de l'énergie, nous pouvons dire que l'énergie potentielle de la personne avant la chute sera égale à l'énergie cinétique E_c de la personne juste avant qu'elle ne touche le sol. Autrement dit, de 400 J.

La vitesse de la personne juste avant que celle-ci ne percute le sol nous sera donnée par

$$E_c = m \frac{v^2}{2} \Leftrightarrow v = \sqrt{2 \frac{E_c}{m}} = \sqrt{2 \frac{400}{10}} \text{ m/s}$$

Autrement dit, dans un cas plus général, nous aurions eu, en considérant $E_p(t_0) = E_c(t_f)$, où t_f est le temps de chute, l'équation

$$v = \sqrt{2 \frac{E_c(t_f)}{m}} = \sqrt{2 \frac{E_p(t_0)}{m}} = \sqrt{2 \frac{m g h}{m}} = \sqrt{2 g h}$$

Qui est identique à la solution que nous avons obtenu lors de l'étude de la chute d'un corps en cinématique et qui nous assure que la vitesse d'un corps qui chute est indépendante de sa masse.

Pour conclure, si aucun travail extérieur n'est appliqué, nous dirons finalement qu'un mobile

- qui monte, perd de l'énergie cinétique qui se transforme en énergie potentielle
- qui descend, perd de l'énergie potentielle qui se transforme en énergie cinétique

Les théorèmes énergétiques vont donc nous permettre, à l'instar de la dynamique, de résoudre certains problèmes liés aux mouvements de corps massifs.

Chapitre 12

Mécanique relativiste et mécanique quantique

12.1 Mécanique quantique

Fille de l'ancienne théorie des quanta, la mécanique quantique constitue le pilier d'un ensemble de théories physiques qu'on regroupe sous l'appellation générale de physique quantique. Cette dénomination s'oppose à celle de physique classique, celle-ci échouant dans sa description du monde quantifié (découpé en petites parties), microscopique, atomes et particules, ainsi que dans celle de certaines propriétés du rayonnement électromagnétique.

Les principes fondamentaux de la mécanique quantique ont été établis essentiellement entre 1922 et 1927 par Bohr, Dirac, de Broglie, Heisenberg, Jordan, Pauli et Schrödinger. Ils permettent une description complète de la dynamique d'une particule massive non relativiste.

Les principes de base ont été complétés par Bose et Fermi afin d'autoriser la description d'un ensemble de particules identiques, ouvrant la voie au développement d'une physique statistique quantique. Enfin, en 1930, le mathématicien Von Neumann a précisé le cadre mathématique rigoureux de la théorie.

La mécanique quantique fixe un cadre mathématique tout à fait cohérent qui a permis de remédier à tous les désaccords entre certains résultats expérimentaux mis en évidence à la fin du XIX^e siècle et les prédictions théoriques correspondantes de la physique classique.

La mécanique quantique a repris et développé l'idée de dualité onde-corpuscule introduite par de Broglie en 1924 consistant à considérer les particules de matière non pas seulement comme des corpuscules ponctuels, mais aussi comme des ondes, possédant une certaine étendue spatiale. Bohr a introduit le concept de complémentarité pour résoudre cet apparent paradoxe : tout objet physique est bien à la fois une onde et un corpuscule, mais ces deux aspects, mutuellement exclusifs, ne peuvent être observés simultanément[1]. Si l'on observe une propriété ondulatoire, l'aspect corpusculaire disparaît. Réciproquement, si l'on observe une propriété corpusculaire, l'aspect ondulatoire disparaît.

A ce jour, aucune contradiction n'a pu être décelée entre les prédictions de la mécanique quantique et les tests expérimentaux associés. Ce succès a hélas un prix : la théorie repose sur un formalisme mathématique abstrait, qui rend son abord difficile pour le profane.

12.1.1 Paradoxes de la mécanique quantique : le chat de Schrodinger

Les « paradoxes » de la mécanique quantique ne font état d'aucune faille dans la mécanique quantique, mais révèlent au contraire à quel point notre intuition peut se révéler trompeuse dans ce domaine qui ne relève pas directement de l'expérience quotidienne de nos sens.

L'expérience du chat de Schrödinger fut imaginée en 1935 par le physicien Erwin Schrödinger, afin de mettre en évidence des lacunes supposées de l'interprétation de Copenhague de la physique quantique, et particulièrement mettre en évidence le problème de la mesure.

La mécanique quantique est relativement difficile à concevoir car sa description du monde repose sur des amplitudes de probabilité (fonctions d'onde). Ces fonctions d'ondes peuvent se trouver en combinaison linéaire, donnant lieu à des « états superposés ». Cependant, lors d'une opération dite de « mesure » l'objet quantique sera trouvé dans un état déterminé ; la fonction d'onde donne les probabilités de trouver l'objet dans tel ou tel état.

C'est la mesure qui perturbe le système et le fait bifurquer d'un état quantique superposé (atome à la fois intact et désintégré par exemple, mais avec une probabilité de désintégration dans un intervalle de temps donné qui, elle, est parfaitement déterminée) vers un état mesuré. Cet état ne préexiste pas à la mesure : c'est la mesure qui semble le faire advenir.

Toutefois, la notion de mesure ou de bifurcation n'apparaît pas explicitement ni même indirectement dans le formalisme quantique, et les tentatives d'en faire surgir cette notion se heurtent à d'extrêmes difficultés. En conséquence, certains physiciens n'accordent aucune réalité physique au concept de mesure ou d'observation. Pour eux, les états superposés ne s'effondrent (ou ne « bifurquent ») pas, et l'état mesuré n'existe pas réellement (voir par exemple : Hugh Everett).

C'est pour faire apparaître le caractère paradoxal de cette position et pour poser de manière frappante le problème, que Schrödinger a imaginé cette expérience de pensée.

Erwin Schrödinger a donc imaginé une expérience dans laquelle un chat est enfermé dans une boîte fermée avec un dispositif qui tue l'animal dès qu'il détecte la désintégration d'un atome d'un corps radioactif (par exemple : un détecteur de radioactivité type Geiger, relié à un interrupteur provoquant la chute d'un marteau cassant une fiole de poison gazeux).

Si les probabilités indiquent qu'une désintégration a une chance sur deux d'avoir eu lieu au bout d'une minute, la mécanique quantique indique que, tant que l'observation n'est pas faite, l'atome est simultanément dans deux états (intact/désintégré). Or le mécanisme imaginé par Erwin Schrödinger lie l'état du chat (mort ou vivant) à l'état des particules radioactives, de sorte que le chat serait simultanément dans

deux états (l'état mort et l'état vivant), jusqu'à ce que l'ouverture de la boîte (l'observation) déclenche le choix entre les deux états. Du coup, on ne peut absolument pas dire si le chat est mort ou non au bout d'une minute.

La difficulté principale tient donc dans le fait que si l'on est généralement prêt à accepter ce genre de situation pour une particule, l'esprit refuse d'accepter facilement une situation qui semble aussi peu naturelle quand il s'agit d'un objet plus familier comme un chat.

Cette expérience n'a jamais été réalisée, car :

- les conditions techniques pour préserver l'état superposé du chat sont très difficiles
- et même si ces conditions sont atteintes, il s'agit d'une pure expérience de pensée, non réalisable même en principe. En effet, on ne pourra jamais mettre en évidence directement, ou mesurer, que le chat est à la fois mort et vivant car le fait d'essayer de connaître son état provoquera nécessairement l'effondrement de la fonction d'onde.

En fait, le but est surtout de marquer les esprits : si la théorie quantique autorise à un chat d'être à la fois mort et vivant, c'est ou bien qu'elle est erronée, ou bien qu'il va falloir reconsidérer tous nos préjugés.

Schrödinger lui-même a imaginé cette expérience pour réfuter l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique, qui conduisait à un chat à la fois mort et vivant. Einstein avait fait la même expérience de pensée avec un baril de poudre. Schrödinger et Einstein pensaient que la possibilité du chat mort-vivant démontrait que l'interprétation de la fonction d'onde par Max Born était incomplète. Nous verrons dans la partie « quelle solution ? » que cette situation souligne bien l'étrangeté de la mécanique quantique, mais ne la réfute pas.

Il est évident que le fait que l'interprétation orthodoxe de la physique quantique mène à un chat à la fois mort et vivant montre que la mécanique quantique obéit à des lois souvent contraires à notre intuition. Pire, on se rend compte que la question n'est pas « comment est-ce possible dans le monde quantique ? » mais « comment est-ce impossible dans le monde réel ? ».

12.2 Mécanique relativiste

On nomme Relativité restreinte une première version de la théorie de la Relativité, émise en 1905 par Albert Einstein, qui ne considérait pas la question des accélérations d'un référentiel, ni les interactions d'origine gravitationnelles. Cependant, elle présentait une explication cohérente des interactions électromagnétiques et de leurs transformations par changement de référentiel à l'aide de la transformation de Lorentz. De plus, elle résolvait des paradoxes existant en mécanique classique relatifs aux mesures de la vitesse de la lumière. Cette théorie a introduit pour la première fois la notion d'espace-temps et expliqué quelques phénomènes étonnants, mais vérifiés expérimentalement, de variation des mesures de longueur et de durée entre un observateur et un autre, chacun d'eux étant situé dans un référentiel différent.

Elle est enseignée dans le cadre de la cinématique en mathématiques et comme introduction à la

relativité générale en physique pour sa clarté et sa simplicité. D'autre part, c'est actuellement la seule théorie utilisable pour représenter les effets relativistes en mécanique quantique.

La théorie a été popularisée en science-fiction, notamment en raison du phénomène de dilatation des temps, avec le célèbre paradoxe des jumeaux. Elle a eu également un impact en philosophie en éliminant toute possibilité d'existence d'un temps et de durées absolues dans l'ensemble de l'univers, implicitement admis avant elle.

12.2.1 Dilatation du temps

La dilatation des durées : un phénomène physique durant un intervalle de temps dans un référentiel, dure une quantité différente dans un autre référentiel.

Supposons un intervalle de temps Δt_0 correspondant à l'intervalle entre deux battements de coeur d'un individu, entre deux tocs d'une horloge, immobiles dans le référentiel \mathbb{R}' , ce qui veut dire que dans ce référentiel les deux événements (1er battement, 2ème battement,...) ont lieu au même point d'espace de \mathbb{R}' . Dans le référentiel \mathbb{R} par rapport auquel se déplace \mathbb{R}' , à la vitesse v , le voyageur ou l'horloge se sont déplacés d'une distance $\Delta x = v \Delta t$, fournissant une expression de l'intervalle d'espace temps, vu de \mathbb{R} . La conservation de l'intervalle d'espace-temps fournit alors :

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ainsi, le même phénomène durant 1 s (par exemple) dans un référentiel où il est au repos est vu durer γ s dans le référentiel par rapport auquel le sujet du phénomène se déplace à la vitesse v : une horloge qui se déplace apparaît ralentir.

Il faut insister ici sur la signification de la notion de durée entre deux événements dans un référentiel. La méthode de mesure consiste à attribuer comme coordonnée temporelle d'un événement l'instant lu sur l'horloge fixe du référentiel à l'endroit où se passe cet événement. Ainsi la durée la plus courte est-elle celle qui correspond au référentiel associé au phénomène (au voyageur, à son horloge propre) ; elle n'est lue que par l'intermédiaire d'une seule horloge, on lui attribue le nom de durée de temps propre.

Pour tout référentiel par rapport auquel le voyageur se déplace la durée du phénomène demande, pour sa mesure, deux horloges, une à chacun des points du référentiel où se trouvera le voyageur à l'instant initial et à l'instant final. C'est cette durée à laquelle il faut comparer la durée propre.

Les vérifications expérimentales sont nombreuses : durée de vie de muons atmosphériques, durée de vie de particules dans les accélérateurs ... marches des horloges embarquées des satellites (le phénomène sert dans ce cas à séparer des effets de la gravitation).

12.2.2 Contraction des longueurs

La contraction des longueurs dans la direction du déplacement : supposons que dans le référentiel \mathbb{R}' se trouve une règle fixe, de longueur L_0 , le long de l'axe $O'x'$, cette longueur mesurée sur les règles étalons associées au référentiel dans lequel la règle est fixe est la longueur propre de la règle.

Dans le référentiel \mathbb{R} , par rapport auquel la règle se meut, la mesure demande aussi la définition d'une méthode, acceptable pour tous les référentiels. On appellera longueur de la règle mobile la distance entre les points de \mathbb{R} qui coïncideront avec les extrémités de la règle, au même instant de \mathbb{R} , choisi arbitrairement.

Cette méthode appliquée à partir des relations de transformation fournit :

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

La longueur de la règle mobile est donc plus courte (que sa longueur propre) dans tout référentiel par rapport auquel elle se meut.

Les vérifications expérimentales sont un peu différentes que celles citées plus haut : dans le référentiel des muons traversant l'atmosphère à grande vitesse, c'est l'atmosphère qui se meut, mais de plus l'épaisseur d'air traversée n'est plus quelques kilomètres, mais quelques centaines de mètres...

Cette contraction avait été envisagée, avant Einstein, par Fitzgerald, et soutenue ensuite par Poincaré.

12.2.3 Relativité de la simultanéité : le paradoxe du train

La relativité de la simultanéité : la modification des valeurs des durées entre deux événements lors du passage d'un référentiel à l'autre devient spectaculaire dans le cas d'événements simultanés. La relativité, via la possibilité de synchronisation des horloges fixes dans un référentiel donné, limite la notion de simultanéité à l'intérieur d'un référentiel galiléen. C'est d'ailleurs ce qui a permis de définir la méthode de mesure de distance ci-dessus.

Deux événements simultanés dans \mathbb{R} , en deux points de \mathbb{R} différents, ne sont plus simultanés dans tout autre référentiel en mouvement par rapport à \mathbb{R} . On insistera sur le fait que de tels événements sont ailleurs l'un de l'autre et que, donc, ils ne sont pas cause-effet l'un de l'autre.

On considère un train et un tunnel de chemin de fer qui ont (dans le même référentiel) la même longueur.

Ce tunnel est équipé de deux détecteurs, un à l'entrée, appelons-le E et l'autre à la sortie, on l'appelle S , et le train s'apprête justement à le traverser. Il est très rapide et se déplace à une vitesse proche de celle de la lumière. Le détecteur S émet un signal lumineux lorsque l'avant du train sort du tunnel. Le

détecteur E quant à lui émet un signal lumineux lorsque l'arrière du train entre dans le tunnel.

Un observateur placé en bordure de voie et précisément à égale distance des deux détecteurs voit le train traverser le tunnel et constate que

1. E a émis un signal avant S . Il en déduit donc que le train est plus court que le tunnel ;
2. le train mettra 2 secondes pour arriver à sa destination en continuant à cette allure.

Pourtant, après être arrivé à destination, il rencontre un passager du train qui lui affirme que :

1. Au contraire, c'est S qui a émis un signal avant E et que c'est bien naturel car le train était plus long que le tunnel d'après lui ;
2. le train, gardant sa vitesse pratiquement jusqu'à la gare, est arrivé à destination en 1 seconde.

Qui s'est trompé ? Personne. La relativité restreinte affirme que la distance, la durée et la simultanéité sont relatives, à savoir qu'elles varient d'un référentiel à l'autre.

Ainsi le train paraît-il plus court pour un observateur placé dans le référentiel du tunnel, alors que c'est le tunnel qui paraît plus court pour un observateur assis dans le train, et tout cela par le simple fait que les deux observateurs ont des notions très différentes de la simultanéité des deux événements E et S .

Ce paradoxe est confirmé par l'expérience. Par exemple, pour un observateur immobile, une particule instable (comme un élément radioactif) met en moyenne plus de temps à se désintégrer dans un accélérateur de particule que lorsqu'elle est au repos.

Cinquième partie

Mécanique des fluides

La mécanique des fluides est la branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle est actuellement étendue à des écoulements solides tels les glaciers ou le manteau terrestre.

Le mouvement des liquides et des gaz est régi par les mêmes équations : les équations de Navier-Stokes¹ mais avec la différence que l'on considère en général les liquides comme étant incompressibles et les gaz compressibles.

La mécanique des fluides se compose de deux grandes sous-branches :

- la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède, l'étude de la pression
- la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement.

Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement à leur viscosité, une de leur caractéristique physico-chimique. La famille des fluides newtoniens (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides non newtoniens (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Les fluides newtoniens ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. Les fluides non newtoniens ont, en plus, la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent. La rhéologie est la science qui traite des fluides non newtoniens. Comme autres branches de la mécanique des fluides on distingue : l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, l'étude des écoulements polyphasiques², l'électro-fluidodynamique, la biomécanique, la microfluidique... Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies : la mécanique des fluides numérique (CFD ou *Computational Fluid Dynamics* en anglais), qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs très puissants : les super-calculateurs.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, l'étude de l'écoulement du sang (hémodynamique), mais aussi la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie.

¹En coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) , les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

- Équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0$$

- Équation de bilan de la quantité de mouvement ($j = 1, 2, 3$) :

$$\frac{\partial (\rho v_j)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_i} + \rho f_j$$

- Équation de bilan de l'énergie :

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho e + p) v_i] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{i,j} v_j) + \sum_{i=1}^3 \rho f_i v_i - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} + r$$

²Un écoulement polyphasique est un écoulement d'un fluide comportant plusieurs phases. On pourra par exemple étudier le comportement d'un fluide comportant des bulles de gaz, ou encore étudier le comportement de deux fluides non miscibles dans une canalisation.

Chapitre 13

Mécanique des fluides parfaits (non visqueux)

13.1 Principe d'Archimède

Archimède de Syracuse (du grec Arkhimédês), né à Syracuse en 287 av. J.-C. et mort à Syracuse en 212 av. J.-C.), est un grand scientifique Grec de Sicile (Grande Grèce) de l'Antiquité, physicien, mathématicien et ingénieur.

La vie d'Archimède est peu connue, on ne sait pas par exemple s'il a été marié ou a eu des enfants. Les informations le concernant proviennent principalement de Polybe (202 av. J. Chr. - 126 av. J. Chr.), Plutarque (46 - 125), Tite-Live (59 - 17) ou bien encore pour le cas de l'anecdote de la baignoire, de Vitruve, un célèbre architecte romain. Ces écrits sont donc, sauf pour Polybe, très postérieurs à la vie d'Archimède.

Concernant les mathématiques, on a trace d'un certain nombre de publications, travaux et correspondances. Il a en revanche jugé inutile de consigner par écrit ses travaux d'ingénieur qui ne nous sont connus que par des tiers.

Archimède est un mathématicien, principalement géomètre, de grande envergure. Il s'est intéressé à la numération, cherchant, par exemple à écrire le nombre de tous les grains de sable de l'univers. La majeure partie de ses travaux concerne la géométrie.

Archimède est considéré comme le père de la mécanique statique. Dans son traité, De l'équilibre des figures planes, il s'intéresse au principe du levier et à la recherche de centre de gravité.

On lui attribue aussi le principe d'Archimède :

Tout corps plongé dans un fluide est soumis à une poussée de bas en haut égale au poids du volume du fluide déplacé

Le génie d'Archimède en mécanique et en mathématique fait de lui un personnage exceptionnel de la Grèce antique et justifie la création à son sujet de faits légendaires. Ses admirateurs parmi lesquels

Cicéron qui découvrit sa tombe, Plutarque qui relata sa vie, Léonard de Vinci, et plus tard Auguste Comte ont perpétué, enrichi les contes et légendes d'Archimède.

À l'instar de tous les grands savants, la mémoire collective a associé une phrase, une fable transformant le découvreur en héros mythique : à Newton est associée la pomme, à Pasteur le petit Joseph Meister, à Albert Einstein la formule $E = mc^2$. Pour Archimède, ce sera la phrase Eurêka! (en grec : j'ai trouvé!) prononcée en courant nu à travers les rues de la ville alors qu'il venait de trouver l'explication de la poussée du même nom. Archimède venait enfin de trouver la solution à son problème : En effet, il était courant à cette époque que les rois en manque d'argent fondent leurs bijoux en or et découvrent que les présents qui leurs avaient été fait n'étaient en réalité que du plomb plaqué or ou un mélange d'or-argent ! Le roi avait chargé Archimède de trouver un moyen pour déjouer cette fraude. C'est dans sa baignoire, alors qu'il cherchait depuis longtemps, qu'il trouva la solution, d'où sa joie ! Il put mesurer le volume de la couronne par immersion dans l'eau puis la peser afin de comparer sa masse volumique à celle de l'or massif.

Ce que constate Archimède au bain public est que, pour un même volume donné, les corps n'ont pas le même poids apparent, c'est-à-dire une masse par unité de volume différente. On parle de nos jours de masse volumique. L'argent (masse volumique 10500 kg/m^3) étant moins dense que l'or (masse volumique 19300 kg/m^3), il a donc une masse volumique plus faible. De là, Archimède déduit que si l'artisan a caché de l'argent dans la couronne du roi, alors elle a une masse volumique plus faible. Ainsi fut découverte la supercherie du joaillier.

Pour répondre à la question du roi Hiéron, Archimède a donc pu comparer les volumes d'eau déplacés par la couronne et une masse d'or identique. Si les deux déplacent le même volume d'eau, leur masse volumique est alors égale et on peut en conclure que les deux sont composées du même métal. Pour réaliser l'expérience, on peut imaginer plonger dans un récipient rempli à ras-bord la masse d'or. Une certaine quantité d'eau débordera alors du récipient. Ensuite, on retire l'or et on le remplace par la couronne à étudier. Si la couronne est bien totalement en or, alors l'eau ne débordera pas. En revanche, si sa densité est plus faible, de l'eau supplémentaire débordera.

Cette méthode présente deux inconvénients. Le premier est qu'elle ne fait ici intervenir en rien le principe d'Archimède. Le second problème est qu'avec des conditions réalistes, en raison de la forme de la couronne et de la densité de l'or, la hauteur d'eau déplacée est très faible (inférieur au millimètre). Il est donc peu probable qu'Archimède ait pu tirer des conclusions significatives à partir d'une telle expérience.

Une méthode plus réaliste est la suivante. En disposant sur chaque bras d'une balance la couronne d'un côté et son poids égal en or, l'équilibre est initialement obtenu. Ensuite, on peut immerger les deux bras dans de l'eau. Si la couronne et l'or ont la même masse volumique, alors la poussée d'Archimède sera égale sur les deux bras de la balance et l'équilibre sera respecté. Si la couronne ne contient pas uniquement de l'or, alors elle subira une poussée d'Archimède plus importante et un déséquilibre sera alors visible.

Tout corps plongé dans un fluide, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et égale au poids du volume de fluide déplacé ; cette force est appelée « poussée d'Archimède ».

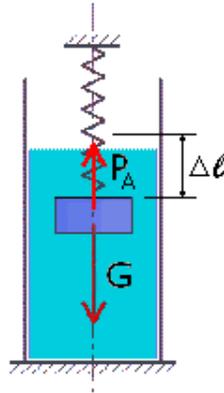


FIG. 13.1 – Poussée d'Archimède

Dans un champ de gravité uniforme, la poussée d'Archimède P_A est toujours donnée par la formule suivante :

$$\vec{P}_A = -M_f \vec{g}$$

où M_f est la masse du fluide contenu dans le volume V déplacé, et g la valeur de la pesanteur.

Si la masse volumique ρ du fluide est elle aussi uniforme, on aura :

$$\vec{P}_A = -\rho V \vec{g}$$

ou encore, si l'on considère uniquement les grandeurs des forces :

$$P_A = \rho V g$$

La poussée d'Archimède P_A s'exprimera en newton (N) si la masse volumique ρ est en kg/m^3 , le volume de fluide déplacé V en m^3 et la valeur de la pesanteur g en N/kg (ou m/s^2).

Remarque : lorsque la masse volumique du corps est inférieure à celle du fluide, le poids apparent est négatif. Voilà pourquoi une planche de bois remonte toujours à la surface de l'eau.

13.1.1 Formulation du théorème d'Archimède et idée de démonstration

Pour nous en convaincre, supposons un cube d'arête a entièrement immergé dans un liquide, sa face du haut étant horizontale et située à une profondeur $z_1 > 0$ (le sens positif est vers le bas).

Dans le cas d'un liquide incompressible au repos soumis à un champ de pesanteur uniforme, la pression absolue p vaut

$$p = p_0 + p_h$$

où p_0 est la pression atmosphérique et p_h la pression hydrostatique.

À une profondeur z , la pression hydrostatique correspond au poids P d'une colonne de liquide (que l'on peut imaginer cylindrique) de hauteur z et de base A , divisé par la base. Or

$$P = mg = [\rho z A]g$$

où m est la masse de la colonne, zA son volume, ρ la masse volumique (supposée uniforme) du liquide et g l'accélération de la gravité, ce qui donne

$$p_h = \frac{P}{A} = \rho g z$$

La pression absolue vaut donc

$$p(z) = p_0 + \rho g z$$

Par symétrie, les forces de pression exercées sur les quatre faces verticales du cube s'annulent deux à deux.

La force F_1 exercée vers le bas sur la face du haut, d'aire $A = a^2$, vaut

$$F_1 = p_1 A = (p_0 + \rho g z_1) a^2$$

La force F_2 exercée vers le haut sur la face du bas, située à la profondeur $z_2 = z_1 + a$, vaut

$$F_2 = p_2 A = (p_0 + \rho g z_2) a^2 = [p_0 + \rho g (z_1 + a)] a^2$$

La résultante F de toutes les forces de pression vaut donc

$$F = F_1 - F_2 = -(\rho g a) a^2 = -\rho g a^3 = -\rho g V = -M_f g$$

où $V = a^3$ est le volume du cube, c'est-à-dire en l'occurrence le volume immergé, et M_f la masse du fluide contenu dans un volume V . La grandeur de la force résultante est donc bien égale à celle du poids $M_f g$ du volume de fluide déplacé. Cette force étant négative, elle est bien orientée verticalement vers le haut.

Il est possible de généraliser la démonstration précédente à un volume de forme quelconque. Il suffit de décomposer la surface bordant le volume en une infinité d'éléments infinitésimaux dS supposés plans, puis de faire la somme, à l'aide du calcul intégral, de toutes les forces infinitésimales df exercées sur chaque élément de surface.

13.1.2 Exemple d'un solide entièrement immergé

Immergeons entièrement un solide de volume V , de masse m et de masse volumique ρ dans un fluide de masse volumique ρ_f uniforme, puis relâchons-le à partir du repos. Au départ, la vitesse étant nulle, deux forces seulement agissent sur le solide : son poids \vec{F}_p (vers le bas) et la poussée d'Archimède \vec{F}_a (vers le haut).

$$F_p = \rho V g \quad \text{et} \quad F_a = \rho_f V g \quad \Rightarrow \quad \frac{F_p}{F_a} = \frac{\rho}{\rho_f}$$

Le rapport des masses volumiques est en l'occurrence équivalent à celui des densités.

- Si la densité du solide est supérieure à celle du fluide, alors $F_p > F_a$ et le solide coule.
- Si la densité du solide est égale à celle du fluide, alors $F_p = F_a$ et le solide demeure immobile. Il est en équilibre neutre ou indifférent.
- Si la densité du solide est inférieure à celle du fluide, alors $F_p < F_a$ et le solide remonte vers la surface.

Dans les deux cas où le solide n'est pas en équilibre, son mouvement ultérieur est déterminé par trois forces : son poids, la poussée d'Archimède (opposée au poids) et une force de frottement visqueux F_f (opposée à la vitesse).

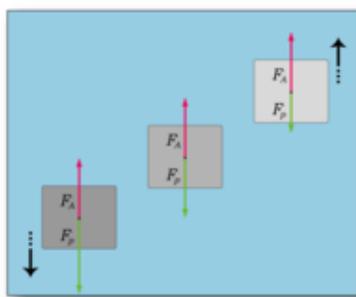


FIG. 13.2 – Poussée d'Archimède : à gauche, $\rho > \rho_f$, au milieu $\rho = \rho_f$, à gauche $\rho < \rho_f$.

Selon la deuxième loi du mouvement de Newton, on a alors :

$$F_p - F_a \pm F_f = ma \quad (\text{le sens positif est vers le bas})$$

où a est l'accélération du solide.

Comme la force de frottement visqueux n'est pas constante, mais qu'elle augmente avec la vitesse, l'accélération diminue graduellement, de sorte que le solide atteint plus ou moins rapidement une vitesse limite, lorsque la résultante des forces est nulle. (Cependant, dans ce chapitre, nous négligerons cette force de frottement)

13.1.3 Exemple d'un solide flottant à la surface d'un liquide

Considérons maintenant un solide de volume V et de masse volumique ρ_S flottant à la surface d'un liquide de masse volumique ρ_L . Si le solide flotte, c'est que son poids est équilibré par la poussée d'Ar-

chimède :

$$F_a = F_p$$

La poussée d'Archimède étant égale (en grandeur) au poids du volume de liquide déplacé (équivalent au volume V_i immergé), on peut écrire :

$$\rho_L V_i g = \rho_S V g$$

Le volume immergé vaut donc

$$V_i = \frac{\rho_S}{\rho_L} V$$

Puisque $V > V_i$, il s'ensuit que $\rho_S < \rho_L$.

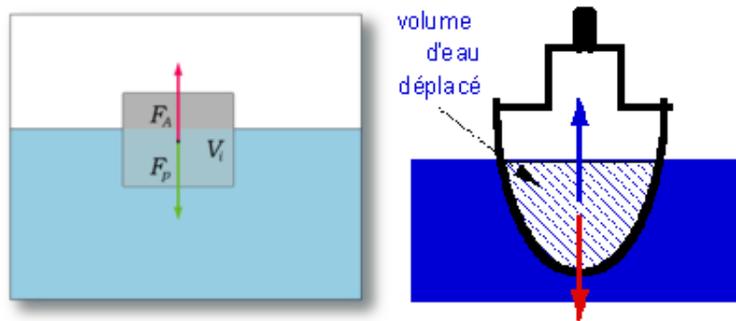


FIG. 13.3 – Solide flottant à la surface d'un liquide

Application au cas d'un iceberg :

Considérons un morceau de glace pure à $0^\circ C$ flottant dans de l'eau de mer. Soit $\rho_S = 0,917 \text{ kg/dm}^3$ et $\rho_L = 1,025 \text{ kg/dm}^3$ (on aurait $\rho_L = 1,000 \text{ kg/dm}^3$ pour de l'eau pure à $3,98^\circ C$). Le rapport $\frac{\rho_S}{\rho_L}$ (c'est-à-dire la densité relative) est de 0,895, si bien que le volume immergé V_i représente près de 90% du volume total V de l'iceberg.

13.1.4 Autres exemples d'application de la Poussée d'Archimède

- Le principe d'Archimède s'applique à des fluides, c'est-à-dire aussi bien à des liquides qu'à des gaz. C'est ainsi grâce à la poussée d'Archimède qu'une montgolfière ou un dirigeable peuvent s'élever dans les airs (dans les deux cas, un gaz de masse volumique plus faible que l'air est utilisé, que ce soit de l'air chauffé ou bien de l'hélium).
- Un plongeur se met à « couler » vers -12 m dans l'Atlantique ou la Méditerranée car sa densité augmente avec la profondeur (à cause de la compression croissante, particulièrement des bulles contenues dans le néoprène de sa combinaison : sa masse ne change pas mais son volume diminue) jusqu'à atteindre et dépasser celle du milieu ambiant.

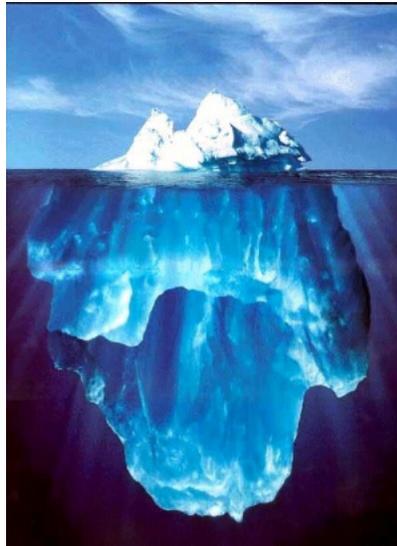


FIG. 13.4 – Iceberg : la partie immergée représente près de 90% du volume total.

- L'eau douce ayant une masse volumique plus faible que l'eau salée, la poussée d'Archimède est plus forte dans la mer Morte (mer la plus salée du monde) que dans un lac. Il est donc plus facile d'y flotter.
- Les spationautes s'entraînent aux exercices dans l'espace dans des piscines où, grâce à la poussée d'Archimède qui équilibre leur poids, ils peuvent connaître un état qui s'apparente jusqu'à un certain point à l'impesanteur.
- Le poids des navires (et donc leur masse volumique) variant suivant qu'ils soient en charge ou sur lest, la poussée d'Archimède va également varier. Pour maintenir un niveau de flottaison (tirant d'eau) constant et assumer une meilleure stabilité, les navires sont pourvus de ballasts qu'ils peuvent remplir ou vider suivant leur cargaison ou la salinité de l'eau dans laquelle ils naviguent. (Ce qui pose de graves problèmes écologiques, étant donné le trafic maritime actuel.)
- Les sous-marins contrôlent leur masse volumique en utilisant également des ballasts.

Point d'application

Tout se passe comme si la poussée d'Archimède s'appliquait au centre de carène, c'est-à-dire au centre de gravité du volume de fluide déplacé.

Cette caractéristique est importante pour le calcul de la stabilité d'un sous-marin en plongée ou d'un aérostat à faible altitude : sous peine de voir l'engin se retourner, il est nécessaire que le centre de carène soit situé au-dessus du centre de gravité.

Pour ce qui est d'un navire ou d'un aérostat en haute altitude, en revanche, le centre de carène est souvent situé au-dessous du centre de gravité (par exemple pour une planche à voile). Cependant, lorsque la pénétration de l'objet dans le fluide évolue, le centre de carène se déplace, créant un couple qui vient s'opposer au mouvement. La stabilité est alors assurée par la position du métacentre, qui est le point

d'application des variations de la poussée. Ce métacentre doit se trouver au-dessus du centre de gravité.

De façon anecdotique, on peut remarquer que les concepteurs d'aérostats et de sous-marins doivent s'assurer simultanément de deux types d'équilibres pour leurs engins.

13.2 Pression

La pression est la force exercée sur une surface donnée.

Soit F la norme de la somme des forces normales appliquées à la surface S d'un corps. En physique, on définit la pression, notée p , comme le quotient d'une force (F) sur l'aire de la surface (S) sur laquelle elle s'applique :

$$p = \frac{F}{S}$$

La pression en un point (x, y, z) est donc la limite à laquelle tend ce rapport quand la surface tend vers zéro. On a

$$p(x, y, z) = \frac{dF}{dS}$$

Dans le système international, l'unité de mesure de la pression est le pascal (Pa) : une pression de 1 pascal correspond à une force de 1 newton exercée sur une surface de 1 m^2 .

Autres unités usuelles :

- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
- $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$
- $1 \text{ kgf/cm}^2 = 0,981 \text{ bar}$ (kgf = kilogramme force)
- $1 \text{ psi} = 6894 \text{ N/m}^2 = 6894 \text{ Pa} = 0,06894 \text{ bar}$ (psi = pound per square inch (lb/in^2), livre par pouce carré, unité anglo-saxonne)
- $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$ (atm = atmosphère)
- $1 \text{ mmHg} = 1 \text{ torr} = 133 \text{ Pa}$ (mmHg = millimètre de mercure)

L'appareil de mesure de la pression est le manomètre. Pour la pression atmosphérique, on utilise le baromètre. On peut également utiliser un vacuomètre pour mesurer la pression d'un gaz dans un tube à vide.

Dans un contenant fermé, un liquide va exercer une force égale sur toute la surface. cette loi s'appelle la loi d'Archimède.

Expérimentalement, on constate que la pression dans l'eau ne dépend que de la profondeur et pas de la direction. En effet, si l'on prend une petite boîte rigide ouverte d'un côté et que l'on tend une membrane élastique, cette boîte enfermant de l'air à pression atmosphérique, et que l'on plonge cette boîte dans l'eau, la déformation de la membrane permet de visualiser la différence de pression entre l'air et l'eau, et celle-ci ne dépend que de la profondeur, pas de l'orientation de la boîte ni de sa position dans le plan horizontal.

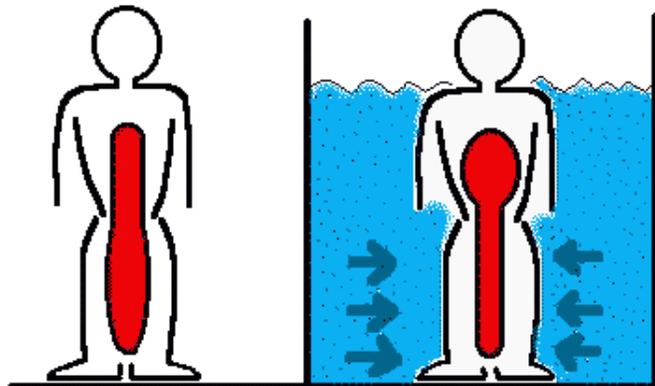


FIG. 13.5 – La pression hydrostatique refoule une importante quantité de sang des membres inférieurs vers la partie céphalique de l'organisme, et en particulier le thorax (600 à 700 ml de sang, qui s'accablent d'un seul coup dans la circulation pulmonaire, car s'y trouvent les seuls vaisseaux de l'organisme capables de se distendre).

Le fluide étant incompressible, il transmet intégralement les efforts. La pression à une profondeur z résulte donc de la pression p_0 qu'exerce l'air en surface, et du poids P de la colonne d'eau au-dessus de la membrane.

Supposons que la membrane soit horizontale et orientée vers le haut, et que son aire est S . La colonne d'eau située au-dessus a pour volume Sz , donc pour masse ρSz si ρ est la masse volumique de l'eau. Le poids P de l'eau est donc

$$P = \rho g(Sz)$$

où g est l'accélération de la gravité. La membrane est alors soumise à une force F

$$F = p_0 S + \rho g(Sz)$$

soit une pression

$$P = \frac{F}{S} = p_0 + \rho g z$$

Rappelons que c'est cette variation de la pression en fonction de la profondeur qui crée la poussée d'Archimède.

13.3 Écoulement laminaire

L'hydrodynamique est l'étude des fluides en mouvement.

On imagine aisément la difficulté d'écrire l'équation du mouvement de chaque particule d'un nuage de fumée par exemple. En outre, les chocs et interactions entre particules ne nous facilitera certainement

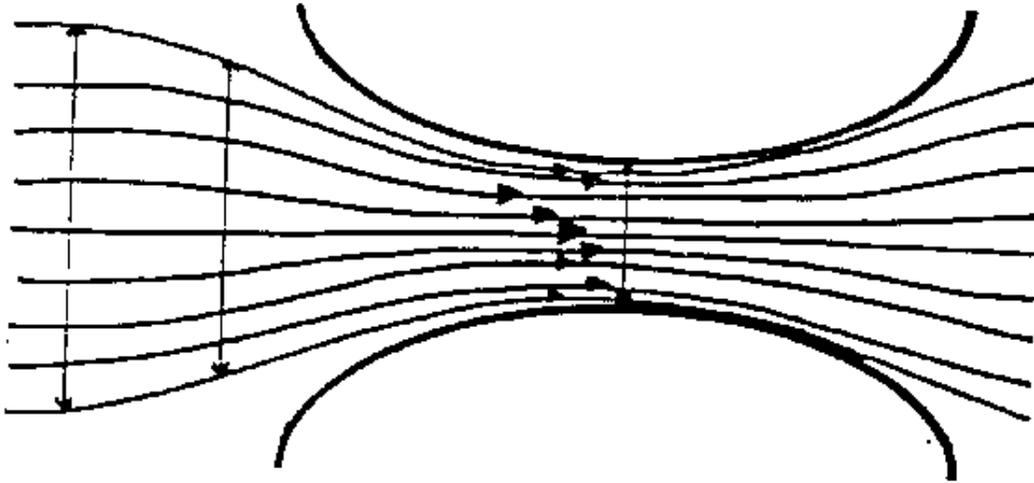


FIG. 13.6 – Écoulement laminaire : lignes de courant

pas la tâche.

Cependant, le problème se simplifie lorsqu'on considère l'écoulement d'un fluide dans un cas particulier : l'écoulement laminaire.

Un écoulement est dit laminaire lorsqu'il est régulier (qu'il ne présente pas trop de variations spatiales ou temporelles), bien souvent stationnaire. Il s'agit en fait d'une solution stable des équations de Navier-Stokes, au sens où si on modifie l'écoulement, il retourne vers la solution laminaire.

Si l'écoulement est laminaire, chaque particule passant par un point A suit exactement la même trajectoire que les particules passées précédemment par le point A . Ces trajectoires sont les *lignes de courant*. Cet effet est basé sur la conservation de l'énergie des particules de fluide qui empruntent une ligne de courant.

Si la section droite du tube varie, la vitesse de chaque particule va varier le long de ces lignes de courant, mais en un point donné du tuyau, la vitesse d'une particule se trouvant en ce point est toujours la même.

La viscosité stabilise et régularise les écoulements de façon générale. Un fluide présentant une viscosité importante s'écoulera de façon laminaire. Un écoulement est caractérisé par son nombre de Reynolds Re , qui permet de se faire une idée de sa stabilité : quand ce nombre est petit, l'écoulement est laminaire, quand il est grand, l'écoulement est en général instable et turbulent.

Cependant, de part sa viscosité, un fluide réel aura une plus grande vitesse au centre du tuyau que près des parois (profil linéaire ou parabolique). Dans un but de simplification, nous commencerons par

supposer que le fluide est non visqueux (aucune force de frottement) et que la vitesse est la même en tout point d'une section droite transversale.

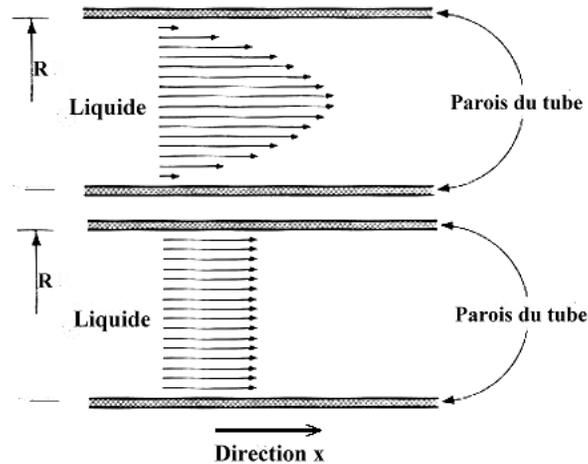


FIG. 13.7 – Profil de la vitesse : écoulement d'un fluide visqueux (en haut) et non visqueux (en bas)

Pour résumer, l'écoulement d'un fluide est laminaire à condition que sa vitesse ne soit pas trop grande et que les obstacles, rétrécissements et coudes du tuyau soient tels que les lignes de courant ne changent pas trop brusquement de direction.

Si ces conditions ne sont pas remplies, l'écoulement est qualifié de turbulent.

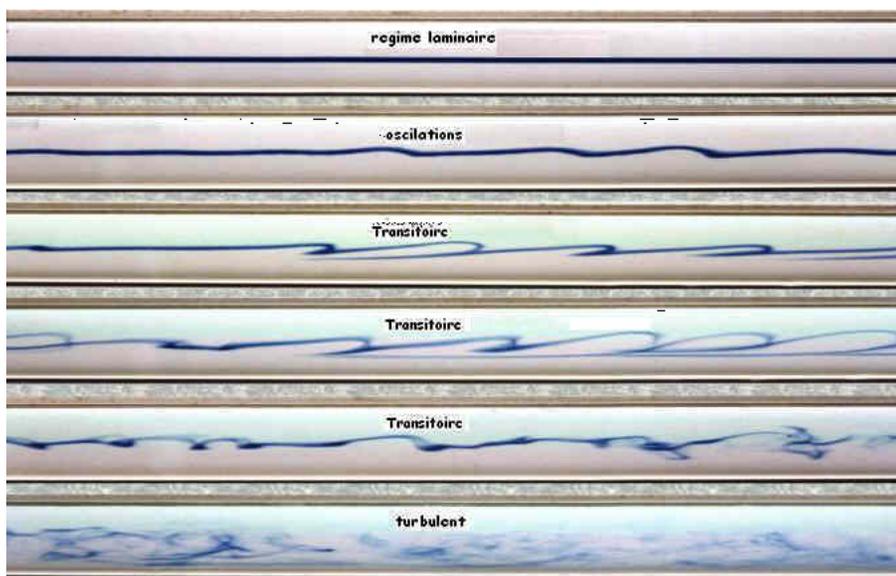


FIG. 13.8 – Différents types d'écoulements : représentation des lignes de courant.

13.4 Equation de continuité

Si l'on considère un fluide comme incompressible et, de manière plus générale, qu'il y a conservation de l'énergie (et donc de la masse), Nous pouvons considérer un tuyau dans lequel s'écoule, de la gauche vers la droite, un fluide. Soit A_1 l'aire de la section 1 du tube et v_1 la vitesse des particules la traversant. Soit A_2 l'aire de la section 2 et v_2 la vitesse.

Pendant un intervalle de temps dt , les particules se déplacent d'une distance $dx = vdt$. Donc, en 1, un volume V_1 de fluide $V_1 = A_1v_1dt$ traversera la surface A_1 et en 2, un volume V_2 de fluide $V_2 = A_2v_2dt$ traversera la surface A_2 .

Si le fluide est incompressible ($\frac{\partial m}{\partial t} = 0$, les volumes V_1 et V_2 sont égaux et on a $A_1v_1 = A_2v_2$. Cette égalité étant valable en tout point du tuyau, on peut écrire

$$A_1V_1 = A_2V_2 = \dots = AV = Cte$$

Remarquons que le débit Q (m^3/s) d'un fluide est le volume traversant une surface A par unité de temps. Dès lors, si $Q_1 = A_1v_1$ et $Q_2 = A_2v_2$, on a

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q = AV = Cte$$

Il s'agit de l'équation de continuité¹ de l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible, non visqueux.

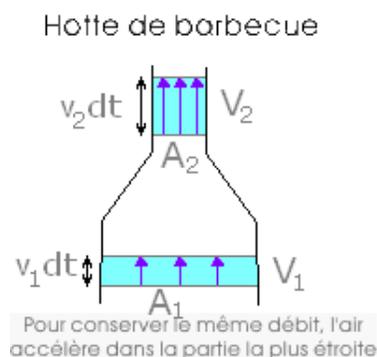


FIG. 13.9 – Illustration de l'équation de continuité

Cette relation exprime que la vitesse d'un fluide augmente quand la section droite du tuyau diminue et réciproquement.

Si la viscosité du fluide n'est pas négligeable, l'équation de continuité reste valable en terme de vitesse moyenne $\bar{v} = \iint_A dv$ selon l'équation $Q = A\bar{v} = Cte$.

¹Qui peut aussi s'écrire $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

13.5 Equation de Bernoulli

La famille Bernoulli, qui s'est illustrée dans les mathématiques et la physique, est issue de Nicolas Bernoulli (1623 - 1708), descendant d'une famille ayant émigré d'Anvers à Bâle à la fin du XVIIe siècle.

Ses représentants les plus connus sont :

- Jacques (1654-1705),
- Jean (1667-1748), tous deux fils de Nicolas,
- Daniel (1700-1782), fils de Jean.

Daniel Bernoulli (Groningue 9 février 1700 - Bâle 17 mars 1782) est médecin, physicien et mathématicien. Il cultiva à la fois les sciences mathématiques et les sciences naturelles, enseigna les mathématiques, l'anatomie, la botanique et la physique. Il publie en 1738 son ouvrage *Hydrodynamica* (Strasbourg) dans lequel il expose le théorème fondamental de la mécanique des fluides qui porte son nom : le théorème de Bernoulli, qui exprime le bilan hydraulique simplifié d'un fluide dans une conduite.

Depuis Navier-Stokes, ce théorème porte simplement le nom d'équation de Bernoulli. Il s'agit de l'équation fondamentale de l'hydrodynamique à la portée de tous. Elle relie la pression, la vitesse et la hauteur en des points situés le long d'une ligne de courant.

Considérons la portion de tube représentée. Cette portion a une section droite uniforme d'aire A_1 à gauche, suivie par une région de section décroissante, puis d'une région de section uniforme d'aire A_2 à droite.

Soit p_1 la pression appliquée sur A_1 et p_2 la pression appliquée sur A_2 . Soit v_1 la vitesse en tous les points de la section large du tube et v_2 la vitesse en tous les points de la section étroite.

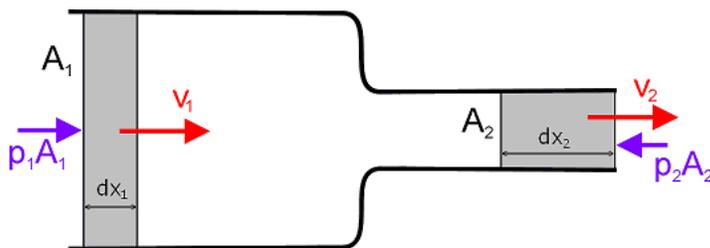


FIG. 13.10 – Equation de Bernoulli : mise en évidence du travail appliqué lors du passage du système de la section 1 à la section 2.

L'équation de Bernoulli découle du principe de la conservation de l'énergie qui exprime que le travail des forces extérieures appliquées au fluide lors de son écoulement d'un endroit vers un autre est égal à la variation de son énergie mécanique $E_{mec} = E_p + E_c$ et on a

$$E_{mec} - E_{mec}^0 = W$$

La force appliquée par le reste du fluide sur la face gauche vaut $p_1 A_1$. Si cette force progresse d'une distance dx_1 , le travail de la force appliquée vaut $p_1 A_1 dx_1$.

La face droite progresse d'une distance dx_2 et subit de la part du reste du fluide une force $p_2 A_2$ qui s'exerce dans le sens opposé à celui du déplacement dx_2 . Le travail de cette force vaut donc $-p_2 A_2 dx_2$.

Le travail des forces appliquées lors du passage du système de la section 1 à la section 2 est donc $W = p_1 A_1 dx_1 - p_2 A_2 dx_2$ (fourni par exemple par une pompe).

Si le fluide est incompressible, les volumes $A_1 dx_1$ et $A_2 dx_2$ sont égaux. Soit dm la masse de fluide comprise dans l'un ou l'autre de ces volumes et ρ la masse volumique du fluide. On a

$$A_1 dx_1 = A_2 dx_2 = \frac{dm}{\rho}$$

$$\text{Donc, } W = (p_1 - p_2) \frac{dm}{\rho}.$$

Puisque l'énergie cinétique ne change pas dans la région de section décroissante, la variation d'énergie cinétique du système est égale à la variation d'énergie cinétique dans les régions $A_1 dx_1$ et $A_2 dx_2$, c'est-à-dire

$$\Delta E_c = \frac{dm}{2} v_2^2 - \frac{dm}{2} v_1^2$$

Si la partie $A_2 dx_2$ ne se trouve pas à la même hauteur z que la partie $A_1 dx_1$, la variation d'énergie potentielle vaut

$$\Delta E_p = gz_2 dm - gz_1 dm$$

où z_1 et z_2 sont les altitudes respectives des parties $A_1 dx_1$ et $A_2 dx_2$ par rapport à un niveau de référence arbitraire.

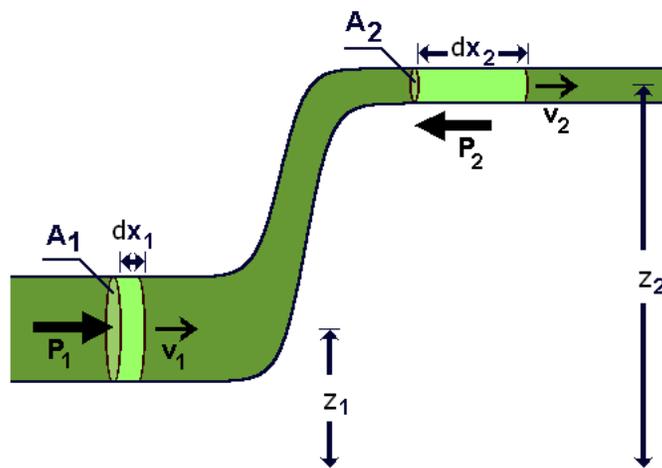


FIG. 13.11 – Equation de Bernoulli : mise en évidence du travail appliqué lors du passage à des hauteurs différentes.

La conservation d'énergie $W = \Delta E_p + \Delta E_c$ implique donc que

$$(p_1 - p_2) \frac{dm}{\rho} = \frac{dm}{2} (v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) dm$$

Si l'on divise les deux membres de cette équation par $\frac{dm}{\rho}$, il vient

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1)$$

c'est-à-dire $p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g z_2$.

Puisque les indices 1 et 2 sont relatifs à deux points quelconques du système, on a que

$$p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = Cte$$

en tout point de l'écoulement. Il s'agit de l'équation de Bernoulli pour un fluide incompressible, non visqueux, en écoulement laminaire.

- v = vitesse en m/s
- g = accélération de la pesanteur en N/kg ou m/s^2
- z = altitude en m
- p = pression dans la conduite en Pa ou N/m^2
- ρ = masse volumique du fluide en kg/m^3 ou g/L

13.5.1 Conséquences statiques de l'équation de Bernoulli

Nous savons que $p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = Cte$. Dès lors, lorsque le fluide est au repos ($v = 0$), on a, vis-à-vis de deux points A et B donnés,

$$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$$

Si le point A est situé à la surface du liquide, $p_A = p_{atm}$ et il vient

$$p_B = p_{atm} + \rho g (z_1 - z_B)$$

Dès lors, on peut conclure que, dans un fluide, des points situés dans le même plan horizontal ont la même pression, ce qui s'observe avec les vases communicants.

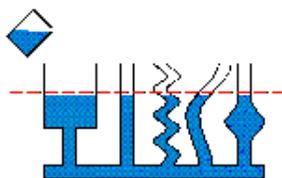


FIG. 13.12 – Vases communicants

L'exemple du manomètre est aussi une conséquence statique de l'équation de Bernoulli. En effet, si $p_B = p_{gaz}$ est la pression du gaz contenu dans l'enceinte du manomètre et $p_A = p_{atm}$ la pression du liquide communiquant avec l'extérieur, on a $p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$. Dès lors, la pression atmosphérique extérieure p_{atm} peut se déduire de la hauteur $z_B - z_A = h$ et on a

$$p_{atm} = p_{gaz} + \rho g h$$

la valeur $\rho g h$ est appelée pression de jauge.

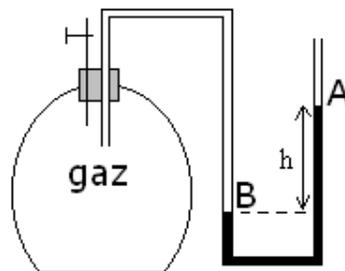


FIG. 13.13 – Manomètre

Le baromètre à colonne de mercure se base sur un principe équivalent. On a $p_B = p_{gaz} \approx 0$ et la pression atmosphérique se déduit de la hauteur de la colonne de mercure. On a

$$p_{atm} = \rho_{Hg} g h$$

où ρ_{Hg} est la masse volumique du mercure et h la hauteur de la colonne de mercure.

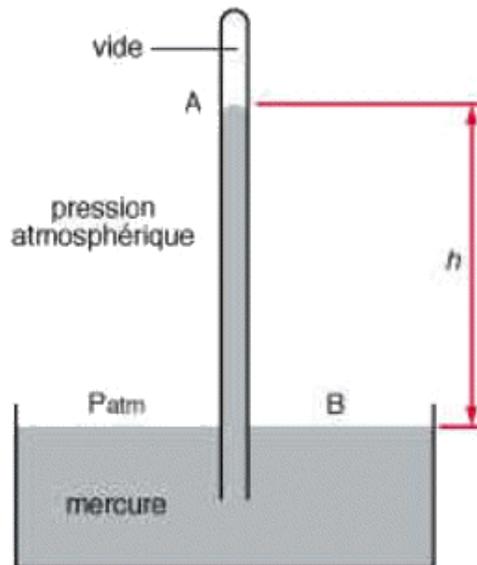


FIG. 13.14 – Baromètre à colonne de mercure

13.5.2 Conséquences dynamiques de l'équation de Bernoulli

Nous avons tous observé au cours de notre vie de nombreuses conséquences dynamiques de la loi de Bernoulli, peut-être sans le savoir. Le rideau de douche attiré par le jet d'eau, les feuilles soulevées par le vent, la pression d'eau qui chute le matin lorsque tous les voisins prennent une douche en même temps, etc.

En guise d'exemple, considérons deux feuilles de papier parallèles et suspendues verticalement. Supposons qu'un courant d'air passe entre les deux feuilles (on souffle). Nous allons donc imposer une vitesse v_i à l'air situé entre les deux feuilles alors que la vitesse de l'air extérieur v_e est nulle. Dès lors, on a, entre l'extérieur et l'intérieur, l'équation de Bernoulli suivante :

$$p_i + \rho \frac{v_i^2}{2} = p_e$$

Dès lors, on peut écrire $p_i = p_e - \rho \frac{v_i^2}{2} \Rightarrow p_i < p_e$. La pression entre les feuilles étant inférieure à la pression de l'extérieur de celles-ci, les deux feuilles auront tendance à se rapprocher (quand on souffle entre elles).

L'effet de Venturi est une application directe de cette conséquence de l'équation de Bernoulli.

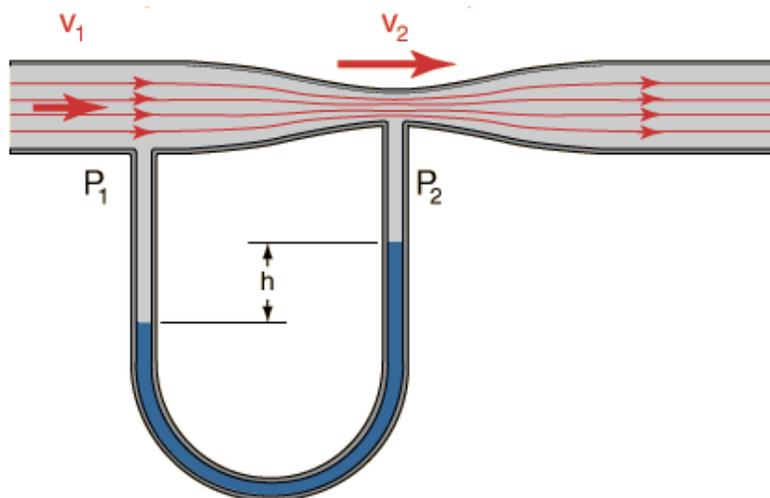


FIG. 13.15 – Effet Venturi

L'effet Venturi (du nom du physicien italien Giovanni Battista Venturi) est le nom donné à un phénomène de la dynamique des fluides où les particules gazeuses ou liquides se retrouvent accélérées à cause d'un rétrécissement de leur zone de circulation.

Il est également à noter que l'accélération du vent occasionne une chute de la température (décompression adiabatique) et favorise la condensation dans un milieu gazeux (que nous négligerons).

On peut comprendre cet effet avec le théorème de Bernoulli : si le débit de fluide est constant et que le diamètre diminue, la vitesse augmente nécessairement. Du fait de la conservation de l'énergie, l'augmen-

tation d'énergie cinétique se traduit par une diminution d'énergie élastique, c'est-à-dire une dépression.

Dans les zones montagneuses, l'effet Venturi est tout le temps présent. Si les particules d'air rencontrent une montagne (ou tout terrain surélevé), elles se retrouvent obligées pour la franchir de passer par-dessus (si elles ne peuvent passer sur les côtés). La zone de circulation étant moindre, les particules se retrouvent accélérées, de manière à conserver le même débit qu'avant. C'est pour cette raison que le vent au sommet des montagnes est toujours plus rapide que celui à sa base.

Le raisonnement mathématique est simple. Le débit se conserve, donc $A_1 v_1 = A_2 v_2$ et si $A_2 < A_1$ alors $v_2 > v_1$. Or, l'équation de Bernoulli nous donne

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$$

et on a finalement que $A_2 < A_1 \Rightarrow v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$.

Notons que l'effet Venturi ne concerne que les vitesses d'écoulement subsoniques.

Chapitre 14

Écoulement des fluides visqueux

14.1 Viscosité

La viscosité (du latin viscum) désigne la capacité d'un fluide à s'écouler, en mécanique des fluides. En langage courant, on utilise aussi le terme de fluidité.

Lorsqu'un fluide s'écoule, il existe des forces de frottement entre le fluide et la paroi, mais aussi dans le fluide lui-même. Lorsque le travail nécessaire pour vaincre ces forces dissipatives devient comparable au travail des forces appliquées au fluide, l'équation de Bernoulli n'est plus valable.

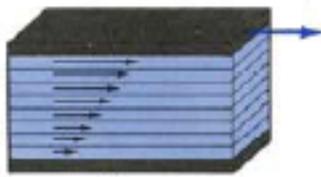


FIG. 14.1 – Écoulement laminaire pour un fluide visqueux : déplacement d'un élément de fluide.

Lorsque la viscosité augmente, la capacité du fluide à s'écouler diminue. La viscosité tend à diminuer lorsque la température augmente. Par contre, on pourrait croire que la viscosité d'un fluide s'accroît avec sa densité mais ce n'est pas nécessairement le cas.

On classe notamment les huiles mécaniques selon leur viscosité, en fonction des besoins de lubrification du moteur et des températures auxquelles l'huile sera soumise lors du fonctionnement du moteur.

Il existe deux types de viscosité :

1. La viscosité dynamique η (ou encore μ) se mesure en pascal-seconde ($Pa.s$), cette unité ayant remplacé le poiseuille (Pl) qui a la même valeur. On trouve encore parfois l'ancienne unité : la poise (Po) ; $1 Pa.s = 10 Po$.

Une façon de définir la viscosité dynamique est de considérer deux couches d'un fluide notées $abcd$ et $a'b'c'd'$, la couche $abcd$ étant animée d'une vitesse relative à $a'b'c'd'$ notée dv et dirigée suivant x . Sous l'effet de la viscosité, une force F s'exerce sur la couche $a'b'c'd'$. La viscosité dynamique η est définie par la relation entre la norme de cette force et la vitesse relative dv :

$$F = \eta S \frac{dv}{dy}$$

S étant la surface de chaque couche, et dy l'épaisseur de fluide séparant les deux couches.

- la viscosité cinématique ν qui s'obtient en divisant la viscosité dynamique η par la masse volumique ρ . Elle s'exprime en m^2/s . Cette unité est très grande. Dans le système CGS la viscosité cinématique était exprimée en stokes (St) ou en centistokes (cSt). La conversion est immédiate, puisque $1St = 1cm^2/s = 10^{-4}m^2/s$ et $1cSt = 1mm^2/s = 10^{-6}m^2/s$.

Remarquons que la viscosité (dynamique) η d'un fluide varie en fonction de sa température ou des actions mécaniques auxquelles il est soumis. Voir par exemple à ce propos le phénomène de thixotropie¹.

Concernant un gaz, il est courant d'utiliser la loi de Sutherland définie de la façon suivante :

$$\frac{\eta(T)}{\eta_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S}$$

$\eta_0 = \eta(T_0)$ est la viscosité à la température T_0 , T_S est la température de Sutherland. Pour l'air par exemple on prend habituellement les valeurs suivantes $\mu_0 = 1.711e-5 Pa.s$, $T_0 = 273,15 K$ et $T_S = 110,4 K$, ce qui donne une bonne approximation sur une plage de température de l'ordre de $170 K$ à $1900 K$ environ.

¹La thixotropie ou thixotropie est la propriété réversible que possèdent certains matériaux de se fluidifier progressivement lorsqu'ils sont soumis à des actions mécaniques ou plus précisément de passer d'un état visqueux à un état fluide. On peut dire aussi qu'un corps thixotrope est un corps dont la viscosité diminue en fonction de la contrainte appliquée. On peut citer les peintures que l'on doit remuer énergiquement avant de les utiliser. Un exemple classique (et dangereux) de corps thixotrope est les sables mouvants.

corps, à la pression atmosphérique	température ($^{\circ}C$)	viscosité η ($Pa.s$)
Fluide parfaitement défini		
hydrogène	0	$8,4 \cdot 10^{-6}$
	50	$9,3 \cdot 10^{-6}$
	100	$10,3 \cdot 10^{-6}$
air	0	$17,1 \cdot 10^{-6}$
	50	$19,4 \cdot 10^{-6}$
	100	$22,0 \cdot 10^{-6}$
xénon	0	$21,2 \cdot 10^{-6}$
eau	0	$1,79 \cdot 10^{-3}$
	20, 2	10^{-3}
	50	$0,55 \cdot 10^{-3}$
	100	$0,28 \cdot 10^{-3}$
glace	-13	$15 \cdot 10^{12}$
mercure	20	$17,0 \cdot 10^{-3}$
acétone	20	$0,326 \cdot 10^{-3}$
éthanol	20	$0,248 \cdot 10^{-3}$
méthanol	20	$0,59 \cdot 10^{-3}$
benzène	20	$0,64 \cdot 10^{-3}$
nitrobenzène	20	$2,0 \cdot 10^{-3}$

Fluide de la vie courante		
bitume	20	10^8
mélasse	20	10^2
miel	20	10
huile de ricin	20	0.985
huile d'olive	20	$[81 \cdot 10^{-2}, 100 \cdot 10^{-2}]$
café crème	20	$10 \cdot 10^{-3}$
sang	37	$[4 \cdot 10^{-3}, 25 \cdot 10^{-3}]$
jus de raisin	20	$[2 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}]$
pétrole	20	$0,65 \cdot 10^{-3}$

Remarquons que la viscosité d'un liquide diminue quand la température augmente et que pour les gaz, la viscosité augmente lorsque la température augmente.

Malgré leur viscosité, les liquides (principalement l'eau) sont utilisés comme lubrifiants parce que ces forces sont plus petites que les forces de frottement sec.

Lorsque la décroissance de la vitesse est linéaire (ou parabolique) vis-à-vis de l'éloignement par rapport à la paroi, nous considérerons l'écoulement comme laminaire.

14.2 Écoulement laminaire dans un tube : loi de Poiseuille

Un fluide visqueux, s'il est en écoulement lent dans un tuyau de petit diamètre ou entre deux plaques proches, est en écoulement de Stokes (laminaire).

En première approximation, si le tuyau est cylindrique ou que les plaques sont parallèles, l'écoulement du fluide est partout parallèle aux parois (approximation de lubrification).



FIG. 14.2 – Écoulement laminaire dans un tube : le fluide en contact avec la paroi est au repos et les couches cylindriques successives se déplacent avec des vitesses de plus en plus grandes. La vitesse du fluide est maximum au centre.

Le frottement aux parois implique qu'aux échelles macroscopiques, la vitesse du fluide y est nulle (condition de non-glissement).

Par ailleurs, la pression ne varie pas dans l'épaisseur de l'écoulement (approximation de lubrification).

Ces trois conditions impliquent que l'écoulement s'organise selon un champ de vitesse parabolique : vitesse nulle aux parois et maximale à mi-hauteur (au centre du tube de rayon R ou à égale distance des deux plaques distantes de h). On a, comme profil de vitesse,

$$v(r) = v_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

dans le cadre d'un tube cylindrique, et

$$v(y) = v_{max} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$

dans le cas de deux plaques parallèles.

Pour un fluide non-visqueux ($\eta = 0$), l'équation de Bernoulli implique que la vitesse moyenne \bar{v} est constante.

Cependant, pour un fluide visqueux, on observe une chute de pression $p_1 - p_2$ correspondant au travail des forces de viscosité (frottements) entre les sections 1 et 2. Cette chute de pression $\Delta P = p_1 - p_2$ est appelée perte de charge.

Dans un tube cylindrique (tuyau), la perte de charge est proportionnelle à la longueur L du tuyau ainsi qu'à la vitesse moyenne \bar{v} de l'écoulement.

La perte de charge par unité de longueur est la perte de charge linéique $\frac{\partial p}{\partial x}$. Si cette perte de charge est constante (la section du tube ne varie pas), $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta P}{L}$.

²La vitesse moyenne \bar{v} dépend de la dimension du tuyau (rayon R) et de la viscosité η du liquide. Nous avons donc que $\bar{v} = k \frac{\Delta P}{L}$ où k est un coefficient de proportionnalité sans dimensions. Or, on sait que $F = \eta S \frac{dv}{dr}$ où r est la distance où se trouve un élément de fluide par rapport au centre du tube et S la surface de la section droite du tube. Donc, $p = \frac{F}{S} = \eta \frac{\bar{v}}{k(R-r)}$ et il vient $\frac{\Delta p}{L} = \frac{\partial p}{\partial r} = \eta \frac{\bar{v}}{k(R-r)^2}$. Dès lors, on peut écrire le débit, avec $k = 8$,

$$Q = \bar{v}S = \frac{R^2 \Delta P}{8\eta L} \pi R^2 = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}$$

qui est l'expression de la loi de Poiseuille dans le cas d'un tube cylindrique de rayon R .

On considère donc deux problèmes différents qui donnent lieu à un écoulement de Poiseuille :

- L'écoulement dans un tube de section circulaire et de rayon constant R , que nous venons de résoudre.
- L'écoulement entre deux plaques planes et parallèles, distantes de h . Ce calcul permet notamment d'évaluer la force entre deux objets (par exemple deux disques) immergés dans un fluide visqueux et s'approchant à une vitesse donnée. On a

$$\bar{v} = \frac{h^2 \Delta P}{4\eta L}$$

Ce cas est plus complexe et ne sera pas traité ici.

14.3 Nombre de Reynolds

L'expérience³ indique qu'il existe une combinaison de quatre facteurs déterminant si un écoulement est laminaire ou turbulent. Ces facteurs sont résumés par le nombre de Reynolds Re .

Le nombre de Reynolds caractérise un écoulement, et en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent etc. ...). Il représente le rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses ou le rapport (qualitatif) du transfert par convection par le transfert par diffusion de la quantité de mouvement. Il est le plus important nombre sans dimension en dynamique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il s'énonce généralement de la façon suivante :

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta}$$

ou bien

²Ce paragraphe manque cruellement de rigueur (il s'agit plus de mathémagie que d'autre chose), mais une analyse dimensionnelle et une démonstration rigoureuse seraient plus longues et nécessiteraient des outils plus puissants non adaptés au cours (de plus, pensons à nos amis les arbres). En outre, une expression exacte de \bar{v} peut être obtenue de façon rigoureuse, en considérant les forces appliquées à chaque couche cylindrique du fluide. Cette approche implique le calcul de quelques intégrales et nous amène d'ailleurs à déterminer la valeur de la constante $k = 8$.

³Jusqu'à présent, rien d'autre à ma connaissance.

$$Re = \frac{\bar{v}D}{\nu}$$

où

- \bar{v} = vitesse moyenne du fluide (m/s),
- D = dimension caractéristique (m) du phénomène :
 - diamètre pour une conduite (de section circulaire le plus souvent), diamètre hydraulique.
 - dimension jugée la plus pertinente pour une conduite ou un obstacle de forme quelconque,
 - abscisse depuis le bord d'attaque pour une plaque plane ou un profil d'aile.
- ρ = (rho) masse volumique du fluide (kg/m^3),
- η = (éta) viscosité dynamique du fluide ($Pa.s$),
- ν = (nu) viscosité cinématique du fluide : $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (m^2/s).

Le nombre de Reynolds peut s'écrire de la manière suivante :

$$Re = \frac{\rho \bar{v}^2}{\frac{\eta \bar{v}}{D}}$$

Il s'interprète alors comme le rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses. Il s'agit donc d'un nombre sans dimensions.

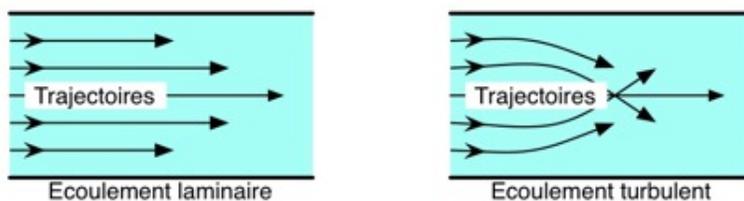


FIG. 14.3 – Illustration d'un écoulement laminaire et turbulent.

On distingue quatre principaux régimes.

- Laminaire (Stokes) : Aux très faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 1), les forces de viscosité sont prépondérantes, l'accélération convective étant négligée. On parle d'écoulement de Stokes. L'écoulement est laminaire (des éléments de fluide voisins demeurent voisins). De plus, comme l'inertie est négligeable, l'écoulement du fluide est réversible. Cela donne lieu à des comportements surprenants : si les forces extérieures sont soudainement stoppées, le fluide s'arrête immédiatement. Qui plus est, si les forces extérieures sont inversées, le fluide repart en sens inverse⁴.
- Laminaire : Aux faibles valeurs du Reynolds (entre 1 et 2000 environ), les forces d'inertie sont prépondérantes, mais l'écoulement reste laminaire. Cependant, il n'est plus réversible : si l'on stoppe les forces extérieures, le fluide continue partiellement sur sa lancée.
- Instable : Aux valeurs intermédiaires du Reynolds (entre 2000 et 3000), les forces d'inertie deviennent importantes. Entre les régimes laminaire et turbulent, on parle donc de régime transitoire (instable).

⁴Dans une célèbre expérience de G. I. Taylor, une goutte d'encre, initialement mélangée dans un fluide visqueux, se reconstitue lorsqu'on a inversé le mouvement.

- Turbulent : Aux fortes valeurs du Reynolds (au-delà d'environ 3000, voir plus haut), les forces d'inertie sont si importantes que l'écoulement devient turbulent. Entre les régimes laminaire et turbulent, on parle de régime transitoire.

14.3.1 Exemples

- Dans une conduite, l'écoulement est laminaire lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à une valeur critique pour laquelle se produit une transition assez brutale vers le turbulent. 2300 est la valeur généralement retenue pour cette transition mais, dans des conditions soignées (paroi particulièrement lisse, stabilité de la vitesse), la transition peut se produire pour une valeur plus élevée. On considère souvent que la transition peut se produire entre 2000 et 3000.
- Sur un cylindre à section circulaire placé dans un écoulement, on obtient un écoulement proprement laminaire qui s'ajuste parfaitement à l'obstacle jusqu'à un nombre de Reynolds de l'ordre de 1. Un sillage turbulent apparaît à l'aval aux environs de 10^5 . Entre les deux, la transition se fait à travers diverses formes de sillages tourbillonnaires.
- Avec une plaque plane située dans le lit de l'écoulement, la dimension caractéristique n'est plus l'épaisseur de celle-ci mais la distance d'un point au bord d'attaque. En effet une couche limite, dans laquelle interviennent la viscosité ou la turbulence, se développe à partir du bord d'attaque. Si celui-ci présente une arête émoussée, la couche limite est turbulente dès le début. Dans le cas d'un bord effilé, la couche limite est laminaire sur une certaine longueur, plus turbulente ensuite. Ce caractère laminaire se maintient jusqu'à la distance qui correspond au Reynolds critique de l'ordre de $5 \cdot 10^5$, la zone située au delà développant une couche limite turbulente.
- Pour un profil d'aile, la distribution d'épaisseur le long de la corde (et le gradient de pression négative associé) de certains profils dits « laminaires » stabilise la laminarité et permet de reculer le point de transition bien au delà de $5 \cdot 10^5$: des valeurs de $7 \cdot 10^6$ sont possibles dans des conditions aérologiques non turbulentes (difficiles à obtenir en soufflerie) sur une surface parfaitement lisse (ailes de planeurs).
- Un corps profilé comme un fuselage (Piaggio P180 Avanti) peut avoir une transition reculée jusqu'à $5 \cdot 10^7$, dans des conditions idéales également.
- Les modifications de régime d'écoulement entraînées par la compression d'une artère, en règle l'artère humérale, lors de la prise de la pression artérielle sont responsables d'un bruit (« bruits de Korotkoff ») et permettent, par l'auscultation de l'artère en aval de la compression, de connaître la pression systolique -apparition du bruit-, et la pression diastolique -disparition du bruit.

14.3.2 Remarque : la similitude des fluides

Deux écoulements à géométrie équivalente pour lesquels les nombres de Reynolds sont égaux sont dits semblables. Pour qu'une expérience de modèle réduit d'un écoulement donne bien un écoulement semblable (c'est-à-dire identique à changements d'échelles de temps, de distance et de masse près) à l'écoulement en grandeur nature, il faut que :

$$Re^* = Re \quad \text{et} \quad \frac{p^*}{\rho^* \bar{v}^{*2}} = \frac{p}{\rho \bar{v}^2}$$

Les valeurs marquées d'une astérisque « * » font référence à l'écoulement dans le modèle réduit et les autres valeurs à l'écoulement en grandeur nature. Ceci est utile pour les expériences sur les modèles réduits en veine liquide ou en tunnel aérodynamique où on récupère les données pour les écoulements en grandeur réelle. Il est à noter que, pour les fluides compressibles, les nombres de Mach doivent aussi être égaux pour les deux fluides afin qu'ils puissent être considérés comme équivalents. De manière générale, il faut que les nombres sans dimension caractéristiques de l'écoulement soient identiques dans les deux écoulements.

14.4 Écoulement dans un tuyau : facteur de friction - Équation de Darcy-Weisbach

Ecrivons tout d'abord l'équation de Bernoulli :

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2$$

Si la viscosité du fluide n'est pas négligeable, l'équation comporte un terme supplémentaire de perte de charge P_{charge} proportionnelle au facteur de friction f du fluide :

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = z_2 - z_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + P_{charge}$$

Si l'on considère un fluide s'écoulant dans un tuyau cylindrique de longueur L et de diamètre constant D , les vitesses v_1 et v_2 sont égales et, expérimentalement, la perte de charge vaut

$$P_{charge} = f \frac{L \bar{v}^2}{2Dg}$$

Donc, dans ce cas, l'équation de Bernoulli s'écrit

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = z_2 - z_1 + f \frac{L \bar{v}^2}{2Dg}$$

Il s'agit de l'équation de Darcy-Weisbach qui est une importante équation très utilisée en hydraulique. Elle permet de calculer la perte de charge due à la friction dans une conduite.

Si l'écoulement est laminaire, le facteur de friction vaut $f = \frac{64}{Re}$ et dans le cas d'un écoulement turbulent, il vaut $f = \frac{1}{Re^{1/4}}$.

14.5 Loi de Stokes et sédimentation

Lorsqu'un fluide visqueux s'écoule lentement en un lieu étroit ou autour d'un petit objet, les effets visqueux dominent sur les effets inertiels. Son écoulement est alors appelé écoulement de Stokes (et on parle parfois de fluide de Stokes par opposition à fluide parfait). Il est en effet régi par une version simplifiée des équations de Navier-Stokes : les équations de Stokes, dans laquelle les termes inertiels sont absents. Le nombre de Reynolds mesure le poids relatif des termes visqueux et inertiels dans les équations de Navier-Stokes. L'écoulement de Stokes correspond ainsi à un faible nombre de Reynolds (beaucoup plus petit que 1).

Donc, pour résumer, considérons un fluide visqueux s'écoulant, à la vitesse v autour d'une sphère (de rayon R) au repos dans des conditions telles que $Re < 1$ (ou que ce soit la sphère qui se déplace lentement, à la vitesse v dans le fluide au repos). Cette sphère subit une force résistante F_R (de freinage, si c'est elle qui se déplace dans le fluide) due à la friction du liquide.

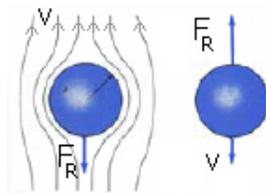


FIG. 14.4 – Force résistante ; à gauche, le fluide se déplace autour de la sphère au repos et à droite, la sphère se déplace dans le fluide au repos.

L'expression de cette force F_R n'est simple que dans le cas d'une sphère, aussi, nous n'étudierons que ce cas particulier.

En utilisant l'analyse dimensionnelle et en se basant sur l'expérience (loi empirique), la loi de Stokes donne l'expression de la force résistante :

$$F_R = 6\pi R\eta v$$

où R est le rayon de la sphère, v sa vitesse et η la viscosité (dynamique) du fluide.

Prenons l'exemple d'une petite bille que l'on lâche dans un seau d'eau. Quelles sont les forces agissant sur la bille ?

- Gravité (poids) : $G = mg$ où m est la masse de la bille.
- Poussée d'Archimède : $P_A = \rho_l g \frac{4\pi}{3} R^3$ où ρ_l est la masse volumique du liquide.
- Force résistante : $F_R = 6\pi R\eta v$. (Dans un cas plus général que la sphère, on emploie $F_R = \phi R\eta v$ et on définit ϕ .)

On lâche la bille sans vitesse initiale, donc $t_0 = 0$, $v_0 = 0$, $r_0 = 0$. La bille tombe vers le bas (dans le fluide). La résultante des forces s'appliquant à la bille vaut donc $R = G - P_A - F_R$ si celle-ci coule.

La bille subit donc une accélération croissante jusqu'à ce que la force résistante, qui est proportionnelle à la vitesse, et la poussée d'Archimède compensent la gravitation. Après un certain temps, l'accélération

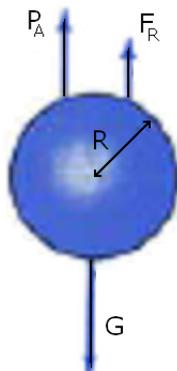


FIG. 14.5 – Sédimentation : illustration

résultante subie par la bille étant nulle (les forces dirigées vers le haut, P_A et F_R , sont égales à la gravitation G), celle-ci atteint une vitesse constante appelée *vitesse limite de chute* ou *vitesse de sédimentation*.

14.5.1 Calcul de la vitesse de sédimentation

Si l'on suppose que les forces de gravitation, de la poussée d'Archimède et de résistance s'égalisent, on a, dans le cas d'une bille, de rayon R et de masse volumique ρ_b , lâchée avec une vitesse initiale dans un fluide de masse volumique ρ_f , l'équation

$$\begin{aligned} F_R + P_A = G &\Leftrightarrow 6\pi R\eta v_{lim} + \rho_f g \frac{4\pi}{3} R^3 = \rho_b g \frac{4\pi}{3} R^3 \\ &\Leftrightarrow 6\eta v_{lim} = \rho_b g \frac{4}{3} R^2 - \rho_f g \frac{4}{3} R^2 \\ &\Leftrightarrow v_{lim} = (\rho_b - \rho_f) \frac{2}{9} R^2 \end{aligned}$$

Donc, la vitesse limite vaut $v_{lim} = (\rho_b - \rho_f) \frac{2}{9} R^2$

Lorsque la loi de Stokes est applicable, la détermination expérimentale de la viscosité η se fait en mesurant le temps nécessaire à un mobile pour parcourir une certaine distance dans un mouvement rectiligne uniforme (une fois sa vitesse limite atteinte). (Le rayon de la sphère se mesure avec un palmer et les masses volumiques de la bille et du liquide se mesurent avec un picnomètre.)

Si la sédimentation se fait sous une autre accélération a que la pesanteur g (exemple : force électromagnétique), la vitesse de sédimentation s'écrit

$$v = \frac{2}{9} a \frac{R^2(\rho_b - \rho_l)}{\eta}$$

Le rapport $s = \frac{v}{a} = \frac{\text{vitesse de sédimentation}}{\text{accélération}} = \frac{2}{9} \frac{R^2(\rho_b - \rho_l)}{\eta}$ est appelé *constante de sédimentation* s et s'exprime en s (cette constante a les dimensions d'un temps).

Dans le cas de sédimentation de macromolécules, les valeurs de la constante s sont faibles et on l'exprime par l'intermédiaire d'une unité appelée SVEDBERG (S) et $1S = 10^{-13}$ secondes.

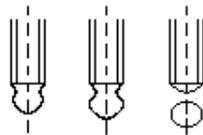
Chapitre 15

Propriétés dues aux interactions moléculaires

15.1 Tension superficielle

15.1.1 Existence d'une tension superficielle

Une goutte d'eau à l'extrémité d'un compte-gouttes se déforme de façon continue, adhère au compte-goutte jusqu'à ce qu'elle atteigne une certaine masse, puis elle tombe.



Des gouttelettes de mercure qui tombent sur du verre rebondissent et se comportent comme des petites billes.

Tout se passe comme si les liquides étaient entourés d'une gaine ayant les propriétés d'une membrane élastique tendue. Cette propriété se traduit par l'existence d'une tension superficielle.

La tension superficielle, ou énergie d'interface, ou énergie de surface, est la tension qui existe à la surface de séparation de deux milieux.

Cet effet permet par exemple aux insectes de marcher sur l'eau, à la rosée de ne pas s'étaler sur les pétales de fleurs, et explique la capillarité. La tension superficielle explique aussi la formation des bulles de savon.



FIG. 15.1 – Formation d'une goutte d'eau.

15.1.2 Interprétation moléculaire

Si l'huile et l'eau ne se mélangent pas, c'est qu'une molécule d'huile est mal à l'aise dans l'eau, et une molécule d'eau est mal à l'aise dans l'huile. Mal à l'aise, ça veut dire que la molécule d'huile a tendance à être attirée par d'autres molécules d'huile et à être repoussée par les molécules d'eau, et vice-versa. Ou, pour parler en termes physiques et chimiques, l'énergie chimique d'une molécule d'huile est plus grande dans l'eau que dans l'huile, et vice-versa.

Les molécules d'un liquide sont donc soumises à des forces de cohésion attractives qui tiennent les molécules au voisinage les unes des autres. (force de Van der Waals (attraction), force électrostatique (attraction ou répulsion).)¹

Ces forces de cohésion décroissent avec la distance et on peut admettre qu'elles deviennent négligeables quand la distance entre les deux molécules devient de l'ordre de $10^{-2} \mu m$.

La distance à laquelle les forces de cohésion deviennent négligeables est appelé *rayon d'action moléculaire*.

Dans le vide, une molécule n'est, par contre attirée par rien. Donc, à la frontière liquide-vide, les molécules sont attirées côté liquide mais pas côté vide. La résultante des forces s'exerçant sur les molécules de la surface est donc dirigée vers l'intérieur du liquide. Ceci tend la surface du liquide.

Mais on sait que soumis au vide, une partie du liquide s'évapore. Si cette pression de gaz est faible, le liquide est soumis à une faible compression, et les molécules de la surface sont également soumises à une faible attraction de la part de leurs paires de la phase gazeuse. Mais la densité du gaz étant très inférieure à celle du liquide, cette attraction est négligeable.

Si maintenant il y a un autre gaz au-dessus (par exemple de l'air), le phénomène est similaire. Le liquide est soumis à la pression du gaz, et les molécules à la surface du liquide sont soumises à l'attraction

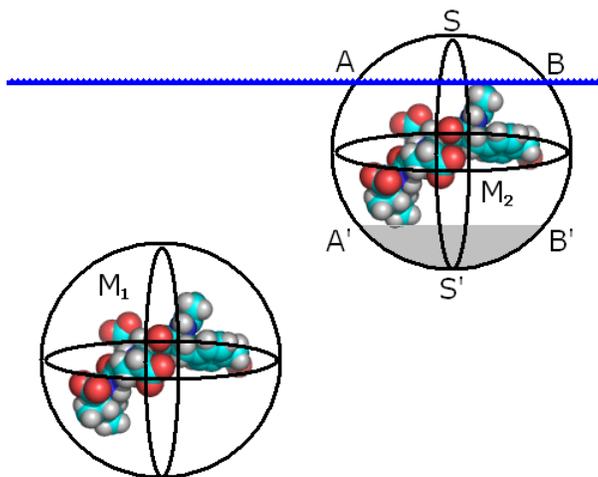
¹Dans les gaz, ces forces sont faibles et tendent à disparaître lorsque la pression diminue (les gaz se comportent alors comme des gaz parfaits).

ou à la répulsion de la part des molécules du gaz. Du fait de la faible densité du gaz par rapport au liquide, on néglige en général cette dernière contribution.

La forme de la surface résulte donc de l'équilibre entre la pression du gaz, l'attraction par l'intérieur du liquide, et le poids si l'on est en présence de pesanteur.

Notons que le liquide peut être sous la forme d'une pellicule. Cette pellicule est alors soumise à la pression du gaz des deux côtés. Si les forces d'attraction au sein du liquide sont faibles, la pellicule ne tient pas. À l'inverse, si ces forces sont fortes, la pellicule tient bien et a un comportement élastique (bulle de savon).

Soit M_1 une molécule et sa sphère d'action.



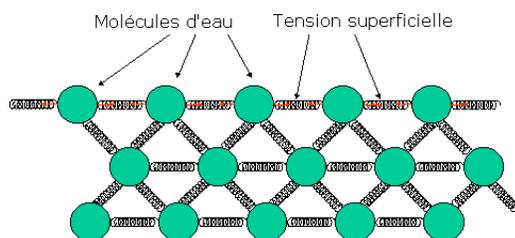
Prenons M_1 telle que la sphère d'action soit entièrement contenue dans le liquide. La molécule est soumise de la part des molécules voisines à des forces d'attraction ayant toutes les directions et qui s'équilibrent par symétrie.

Par contre, une molécule M_2 située à une distance de la surface inférieure au rayon d'action moléculaire est soumise à des forces d'attraction de résultante non nulle.

Les forces d'attraction dues aux molécules situées dans la partie $A'P'B'$ de la sphère d'action ne sont pas compensées par une force égale et opposée puisque la partie symétrique APB est en dehors du liquide.

Donc, le liquide exerce sur M_2 une force dirigée vers l'intérieur. Si l'on veut amener les molécules de l'intérieur du liquide vers la surface, il faut dépenser du travail. C'est-à-dire que si l'on augmente la surface libre du liquide par l'introduction dans la couche superficielle de molécules, on le fait en dépensant du travail. On exprime cela en disant que la surface du liquide possède une énergie proportionnelle à sa surface.

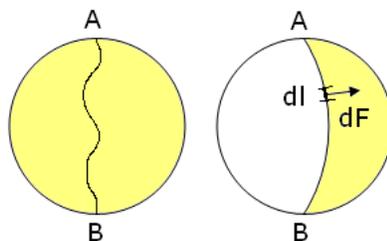
Si l'on veut accroître la surface du liquide en exerçant une traction parallèlement à son plan (force tangentielle à ne pas confondre avec les forces de cohésion), il faut dépenser un travail correspondant



à l'accroissement d'énergie potentielle comme si l'on voulait augmenter la surface d'une membrane en caoutchouc tendue. Ce travail dW est proportionnel à la variation de surface dA . On a $dW = T dA$ où T est la *tension superficielle* du liquide. Il s'agit d'une énergie par unité de surface J/m^2 .

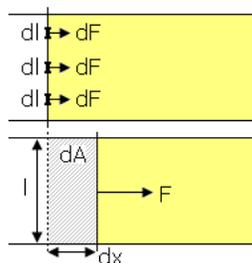
15.1.3 Tension superficielle : définition

Certaines expériences permettent de mettre en évidence la tension superficielle. On peut obtenir une pellicule d'eau savonneuse à l'intérieur d'un anneau métallique auquel on fixe un fil non tendu entre les points A et B . Si on rompt la pellicule d'un côté du fil, on voit l'autre partie de la pellicule tendre le fil pour avoir la plus petite surface possible.



La pellicule d'eau savonneuse exerce sur un petit élément de longueur dl du fil une force tangentielle dF normale à dl .

On peut faire une expérience analogue avec une tige mobile de longueur l pouvant glisser sur deux côtés d'un cadre rectangulaire.



Le rétrécissement de la membrane liquide entraîne un déplacement $d\vec{x}$ de la tige mobile qui effectue un travail $dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$.

Il convient de remarquer qu'une membrane liquide est en fait une mince couche de liquide limitée par une face supérieure et une face inférieure et que ce sont ces deux surfaces qui se rétrécissent.

Le travail effectué par chacune des deux surfaces peut s'exprimer par

$$dW = \sigma dA = \sigma l dx$$

La force s'exerçant sur la tige mobile vaut donc $F = \sigma l$. D'où

$$\sigma = \frac{F}{l}$$

La tension superficielle σ peut aussi être considérée comme une force tangentielle par unité de longueur. C'est sous cette forme qu'on exprime l'unité de tension superficielle $\frac{N}{m}$ dans le système international.

La tension σ dépend

- de la nature du liquide,
- de la nature du gaz avec lequel le liquide est en contact,
- de la température.

Faisons l'expérience suivante : on place une boucle S de coton dans de l'eau (pure). On dépose ensuite, dans S , une goutte de solution savonneuse. La boucle prend alors une forme circulaire, donc, un élément d'arc dl quelconque de cette boucle est donc soumis à une force dF orientée vers l'extérieur.

Soient σ la tension de l'eau pure et σ' la tension de l'eau savonneuse ($\sigma > \sigma'$). On a les forces $dF = \sigma dl$ et $dF' = \sigma' dl$. Donc,

$$dF_{tot} = dF - dF' = (\sigma - \sigma') dl$$

L'ensemble des forces dF_{tot} , s'exerçant sur chaque élément dl , aura pour effet de tendre la boucle et de lui conférer un aspect circulaire.

Les valeurs suivantes sont tirées du polycopié de Broch :

eau	0°C	$\sigma = 7,6 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$
	20°C	$\sigma = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$
	37°C	$\sigma = 7,0 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$
plasma sanguin	37°C	$\sigma = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$
mercure	20°C	$\sigma = 4,36 \cdot 10^{-1} \text{ N/m}$

Un certain nombre d'autres expériences simples permettent de mettre en évidence la tension superficielle :

- Ménisque de l'eau dans un verre : lorsque l'on met de l'eau dans un verre, l'eau remonte d'environ un millimètre le long de la paroi. Ceci est particulièrement visible dans le cas d'un tube à essai (environ 1 cm de diamètre). À l'inverse, on peut faire dépasser la surface de l'eau du bord du verre sans qu'elle ne s'écoule en dehors de celui-ci.

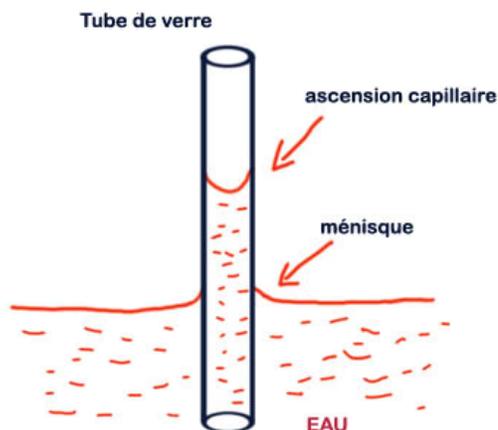
- Goutte qui pend sans tomber : c'est la tension superficielle qui retient la goutte au support. La masse de la goutte qui tombe d'un compte-goutte est donnée par la loi de Tate².
- Propulsion à l'huile ou au savon.
- Un liquide peut monter dans un tube fin : loi de Jurin (voir plus loin).
- Fontaine de soda : dans un soda, les molécules du gaz carbonique dissout sont solvatées, les molécules d'eau forment un bouclier autour du CO_2 . Si l'on secoue la bouteille, on vainc la tension superficielle du bouclier et les molécules de CO_2 se regroupent pour former des bulles. On peut aussi utiliser une poudre : les petits grains abaissent la tension superficielle, on peut par exemple mettre des chewing-gums ou des mentos.

15.2 Capillarité

15.2.1 Tube capillaire

La capillarité est l'étude des interfaces entre deux liquides non miscibles, entre un liquide et l'air ou entre un liquide et une surface. Elle est mise en oeuvre lorsque les buvards aspirent l'encre, ou quand les éponges s'imbibent d'eau.

Elle est plus connue par l'effet d'un liquide à forte tension superficielle remontant contre la gravité dans un tube très fin, dit tube capillaire. La tension superficielle est proportionnelle à la force de cohésion intermoléculaire du liquide concerné. Plus les molécules du liquide ont une cohésion forte, plus le liquide est susceptible d'être transporté par capillarité.



²La loi de Tate est la loi permettant de calculer la masse d'une goutte sortant d'un compte-goutte. Cette loi s'exprime par

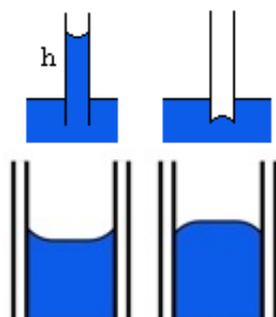
$$m = k \frac{\sigma r}{g}$$

où m est la masse de la goutte, σ est la tension superficielle du liquide, r est le rayon de l'orifice du compte-goutte, g est l'intensité de la pesanteur et k est le coefficient de forme du compte-goutte (coefficient numérique).

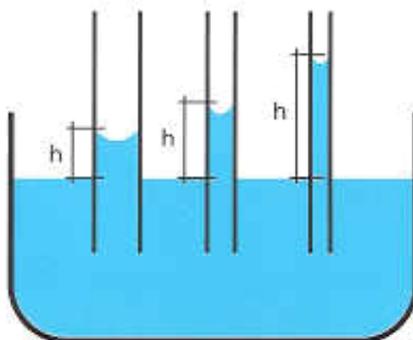
L'eau possède une forte cohésion entre ses molécules : elle adhère aux surfaces du tube, puis ses molécules sont attirées sur la partie de la surface du tube immédiatement au-delà, et par répétition de ce phénomène l'eau monte ainsi le long du tube. L'article tension superficielle décrit comment calculer la hauteur à laquelle monte le liquide dans un tube capillaire grâce à la loi de Jurin.

Sur du verre très propre l'eau forme un film plutôt que des gouttes car les forces d'adhésion entre le verre et l'eau sont plus fortes que celles de cohésion de l'eau.

Dans le cas du mercure, le phénomène est différent. En effet, lorsqu'on dispose un tube capillaire verticalement dans un récipient d'eau, le niveau d'eau est plus grand dans le tube qu'à l'extérieur et le ménisque est concave vers l'intérieur. Lorsqu'on utilise du mercure à la place de l'eau, on constate que le niveau de mercure dans le tube capillaire est inférieur à celui du récipient et que le ménisque est convexe vers l'intérieur.



Lorsqu'on utilise des tubes capillaires de sections différentes, on constate que la différence de niveaux entre le liquide du tube et celui du récipient diminue quand le diamètre du tube augmente.



15.2.2 Forme du ménisque

Soit une molécule M dans le voisinage de la surface du liquide et de la paroi du récipient.

Soit $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ la force résultante à laquelle est soumise la molécule M (en négligeant son poids).

Si \vec{F} est dirigée obliquement vers l'intérieur du liquide, c'est l'effet d'attraction du liquide qui l'emporte sur celui du récipient. C'est le cas du mercure et du verre.

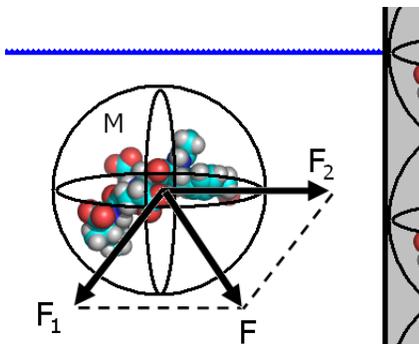
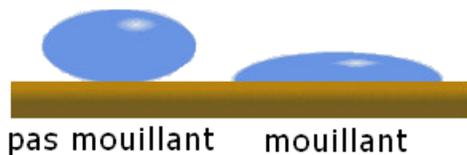


FIG. 15.2 – Au voisinage de la surface du liquide et de la paroi du récipient, une molécule M est soumise, par le liquide, à une force \vec{F}_1 et, par les molécules de la paroi du récipient, une force F_2 .

Lorsqu'on vide le récipient, les molécules n'adhèrent pas à la paroi : le liquide ne mouille pas le récipient.

Si \vec{F} est dirigée obliquement vers l'extérieur, c'est l'effet d'attraction de la paroi qui l'emporte sur celui du liquide. C'est le cas de l'eau et du verre.

Lorsqu'on vide le récipient, les molécules adhèrent à la paroi : le liquide mouille le récipient.

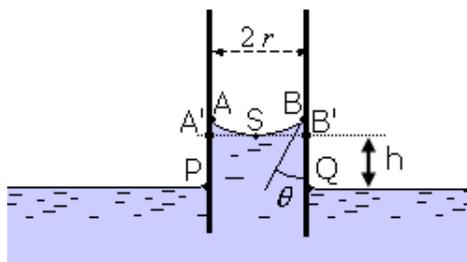


15.2.3 Loi du Jurin

Nous avons vu précédemment que, dans un tube capillaire en verre, la hauteur de la colonne liquide soulevée (eau) ou celle de la dépression du liquide diminuait quand le diamètre du capillaire augmentait.

Cas d'un liquide mouillant le récipient (eau et verre)

Dans le cas d'un liquide mouillant le récipient, considérons un tube capillaire circulaire vertical de rayon r . Appelons h la différence de hauteur entre le sommet S du ménisque ASB et le plan de la surface



libre du liquide dans le récipient.

Exprimons que la colonne de liquide dans le capillaire située au-dessus du plan de la surface libre du liquide est en équilibre.

Les composantes horizontales des forces agissant sur la colonne ont une résultante nulle (par symétrie).

Il suffit donc, pour exprimer l'équilibre de la colonne, d'écrire que la somme des composantes verticales des forces agissant sur la colonne est nulle.

La surface libre du liquide semble se raccorder au tube par un contour circulaire de longueur $2\pi r$. En fait, la surface libre du liquide se prolonge au-dessus de AB par une couche très mince qui exerce sur la colonne une force résultante F verticale orientée vers le haut égale à

$$F = \int \sigma ds = 2\pi r \sigma \cos \theta$$

Si $r \ll h$, on peut considérer que le poids de la colonne de liquide soulevée est égal au poids de la colonne cylindrique $A'B'CD$.

Soit ρ la masse volumique du liquide. Le poids P de la colonne est donc égal à

$$P = \pi r^2 h \rho g$$

Les pressions sur CD et sur ASB s'équilibrent si on néglige la poussée d'Archimède de l'air sur le liquide soulevé par rapport au poids de ce dernier.

On a donc

$$\begin{aligned} F &= P \\ \Leftrightarrow 2\pi r \sigma \cos \theta &= \pi r^2 h \rho g \\ \Rightarrow h &= \frac{2\pi \sigma \cos \theta}{\pi r \rho g} \end{aligned}$$

Il s'agit de l'expression de la loi de Jurin :

$$h = \frac{2\sigma}{r \rho g}$$

qui exprime que la hauteur d'ascension d'un liquide dans un tube cylindrique varie en fonction de l'inverse du rayon du tube. (On a négligé l'angle θ .)

Remarquons que pour mesurer la tension superficielle d'un liquide, on utilise la loi de Jurin sous la forme

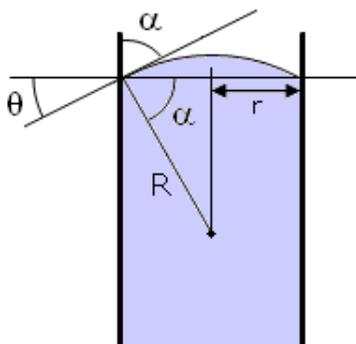
$$\sigma = \frac{1}{2} r \rho g h$$

Cas d'un liquide ne mouillant pas le récipient (mercure et verre)

Lorsque le tube d'un baromètre est fin, le phénomène de capillarité peut être une source d'erreur sur la mesure de la pression.

Quand $r \ll h$ de telle sorte qu'on peut assimiler le ménisque à une calotte sphérique correspondant à une sphère de rayon R ($r = R \cos \alpha$), sous les mêmes considérations que précédemment, on peut démontrer que

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r \rho g}$$



Lorsque la dénivellation h n'est pas assez grande par rapport au rayon r du tube, le ménisque s'aplatit et l'erreur sur la hauteur barométrique devient négligeable.

15.2.4 Exemples et applications

– Capillarité :

L'effet lotus est un phénomène physique d'interactions entre des gouttelettes d'eau et une surface hydrophobe utilisé par certaines plantes pour nettoyer la surface de leurs feuilles, tout en les maintenant « sèches ». Cette particularité est présente dans la famille du lotus qui, malgré son développement dans des rivières et des lacs boueux, arrive à conserver des feuilles propres.

La structure microscopique de la surface et les propriétés chimiques de la plante font que ses feuilles ne sont jamais mouillées. Au contraire, les gouttes d'eau roulent à la surface de la feuille, emportant avec elles des débris, insectes et des poussières.

Cet effet est observable également chez certains animaux (pattes du gerris, petit insecte marchant sur l'eau grâce à cela).

– Tensio-actifs :

Si l'énergie d'interface entre un solide et l'eau est forte, alors l'eau ne s'étale pas et reste sous forme de gouttelette ; c'est ainsi que, comme le montre une célèbre publicité de lessive, « les synthétiques laissent glisser l'eau ». On peut alors ajouter un produit dans l'eau qui diminue l'énergie d'interface ; la goutte s'étale alors et peut pénétrer dans le tissu. On appelle ces produits des « tensio-actifs ».

Les émulsifiants sont des tensio-actifs : si vous laissez reposer une vinaigrette, les gouttes d'huile se regroupent (cf. §3) et forment bientôt une couche d'huile. Si l'on veut garder l'huile sous la forme de petites gouttelettes, ou émulsion, il faut diminuer la tension superficielle afin que le gain d'énergie de surface lorsque deux gouttes se réunissent soit faible. C'est ainsi que les vinaigrettes du commerce sont sous forme d'émulsion alors que la vôtre faite maison se sépare en quelques minutes.

Les tensio-actifs permettent aussi de stabiliser les bulles. Si vous soufflez dans un verre d'eau avec une paille, la bulle, lorsqu'elle atteint la surface, crève. Si maintenant vous mettez du sirop dans l'eau, lorsqu'elle atteint la surface, la bulle reste. L'augmentation de surface due à la présence de la bulle ne provoque pas une grande augmentation d'énergie car la tension superficielle est faible. Donc la bulle est stable. Si vous avez bien suivi, les lessives contenant des tensio-actif, elles forment des bulles facilement, d'où la mousse.

- Le surfactant pulmonaire est une lipoprotéine sécrétée continuellement par les pneumocytes de type 2. Son rôle est de réduire la tension superficielle créée par la fine couche de liquide se trouvant à la surface des alvéoles pulmonaires. La réduction de la tension superficielle facilite l'expansion des alvéoles à l'inspiration. Il est éliminé en permanence, ce qui leur apporte un renouvellement constant. Leur demi-vie est de quelques dizaines d'heures.

Comme beaucoup de lipoprotéines, elle comporte un pôle hydrophile et un pôle hydrophobe, cela lui permet donc de se comporter comme un film superficiel.

Le manque de surfactant est la cause du syndrome de détresse respiratoire aiguë.

– Surfusion :

Lorsque l'on réchauffe de la glace à pression atmosphérique, celle-ci fond à 0°C . Mais lorsque l'on refroidit de l'eau, celle-ci gèle en-dessous de 0°C . En effet, lorsque l'on forme le premier petit cristal de glace, on crée une interface solide-liquide, donc de l'énergie d'interface. Or, plus on descend en température, plus l'énergie d'interface eau liquide-glace est faible. Ainsi, il est plus facile de créer un premier cristal de glace lorsque la température est plus basse que 0°C .

On peut voir aussi cela de la manière suivante : si un petit cristal se forme, il est dissout par l'agi-

tation de l'eau. Plus il fait froid, plus l'eau est calme, donc plus il sera facile de former un cristal.

Lorsque l'on introduit un défaut (poussière, aspérité, ...) ceci permet également d'amorcer la cristallisation plus facilement, et d'annuler l'«effet retardant» de la tension superficielle.

- Pourquoi les bulles de champagne montent toujours du même endroit du verre ? Car le verre présente à cet endroit une aspérité qui diminue l'énergie d'interface gaz-liquide, et permet plus facilement à une bulle de se former.
- Pourquoi aux labos de chimie organique, le fait de gratter le fond du Becher (ou ballon, ou Erlen-Meyer, selon les goûts de chacun) facilite la cristallisation ? Car on crée des aspérités qui facilitent la formation du premier cristal.

Sixième partie

Exercices

Chapitre 16

Les mesures

16.1 Unités

Exercice 1

Effectue les transformations de longueur suivantes :

$$\begin{array}{lll} 3,9 \text{ dm} \rightarrow \text{cm} & 0,05 \text{ dam} \rightarrow \text{dm} & 15,7 \text{ hm} \rightarrow \text{m} \\ 7 \text{ m} \rightarrow \text{km} & 0,26 \text{ dam} \rightarrow \text{hm} & 2,72 \text{ hm} \rightarrow \text{dm} \end{array}$$

Exercice 2

Effectue les transformations de surfaces suivantes :

$$\begin{array}{lll} 12,73 \text{ hm}^2 \rightarrow \text{km}^2 & 74560 \text{ m}^2 \rightarrow \text{hm}^2 & 0,036 \text{ hm}^2 \rightarrow \text{dam}^2 \\ 0,037 \text{ mm}^2 \rightarrow \text{cm}^2 & 4,32 \text{ m}^2 \rightarrow \text{dam}^2 & 523,6 \text{ dm}^2 \rightarrow \text{mm}^2 \end{array}$$

Exercice 3

Effectue les transformations de volume suivantes :

$$\begin{array}{lll} 43000 \text{ ml} \rightarrow \text{m}^3 & 0,0012 \text{ dm}^3 \rightarrow \text{ml} & 150 \text{ ml} \rightarrow \text{mm}^3 \\ 443 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{l} & 30000 \text{ mm}^3 \rightarrow \text{dal} & 39,8 \text{ dl} \rightarrow \text{cm}^3 \end{array}$$

Exercice 4

Effectue les transformations d'unités de temps suivantes :

$$\begin{array}{lll} 30 \text{ s} \rightarrow \text{min} & 2,5 \text{ h} \rightarrow \text{min} & 5 \text{ min} \rightarrow \text{s} \\ 3,5 \text{ jours} \rightarrow \text{h} & 480 \text{ s} \rightarrow \text{min} & 1 \text{ h et quart} \rightarrow \text{min} \end{array}$$

Exercice 5

Effectue les transformations d'unités de masse suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 0,045 \text{ t} \rightarrow \text{kg} & 0,038 \text{ g} \rightarrow \text{mg} & 23 \text{ t} \rightarrow \text{g} \\
 92 \text{ mg} \rightarrow \text{g} & 72'000 \text{ kg} \rightarrow \text{t} & 0,15 \text{ g} \rightarrow \text{mg}
 \end{array}$$

Exercice 6

Effectue les transformations d'unités de capacité et de masse suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 4000 \text{ ml} \rightarrow \text{hl} & 1,2 \text{ hl} \rightarrow \text{l} & 180 \text{ dg} \rightarrow \text{mg} \\
 13,56 \text{ l} \rightarrow \text{cl} & 0,03 \text{ kg} \rightarrow \text{mg} & 12 \text{ cl} \rightarrow \text{l} \\
 2400 \text{ ml} \rightarrow \text{dl} & 5 \text{ dl} \rightarrow \text{l} & 450 \text{ cl} \rightarrow \text{l} \\
 12000 \text{ g} \rightarrow \text{t} & 24 \text{ hl} \rightarrow \text{cl} & 0,2 \text{ dg} \rightarrow \text{kg} \\
 0,03 \text{ hl} \rightarrow \text{ml} & 50000 \text{ l} \rightarrow \text{hl} & 240 \text{ kg} \rightarrow \text{t}
 \end{array}$$

Exercice 7

Effectue les transformations d'unités suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 6,2 \text{ dam} \rightarrow \text{cm} & 6 \text{ min} \rightarrow \text{s} & 17 \text{ cl} \rightarrow \text{ml} \\
 9000000 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{dm}^3 & 900000 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{m}^2 & 13 \text{ hl} \rightarrow \text{l} \\
 240 \text{ min} \rightarrow \text{h} & 600 \text{ mm} \rightarrow \text{dm} & 150 \text{ dam}^3 \rightarrow \text{hm}^3 \\
 3 \text{ dm}^2 \rightarrow \text{hm}^2 & 5 \text{ t} \rightarrow \text{kg} & 2 \text{ h} \rightarrow \text{min} \\
 0,028 \text{ km} \rightarrow \text{mm} & 250 \text{ g} \rightarrow \text{kg} & 700 \text{ m}^3 \rightarrow \text{hl} \\
 1,8 \text{ hm} \rightarrow \text{km} & 1,25 \text{ h} \rightarrow \text{min} & 3 \text{ dl} \rightarrow \text{l} \\
 0,06 \text{ km}^2 \rightarrow \text{dam}^2 & 62000 \text{ kg} \rightarrow \text{t} & 0,3 \text{ dg} \rightarrow \text{mg} \\
 700 \text{ cl} \rightarrow \text{cm}^3 & 0,0005 \text{ m}^3 \rightarrow \text{mm}^3 & 7,38 \text{ dm}^2 \rightarrow \text{mm}^2
 \end{array}$$

16.2 Incertitude absolue et relative : les bases**Exercice 1**

Les dimensions d'un rectangle sont $L = (41,9 \pm 0,1) \text{ mm}$ et $l = (3,6 \pm 0,1) \text{ mm}$. Calculez l'aire du rectangle, ainsi que les incertitudes absolues et relatives sur ces grandeurs.

Exercice 2

Les dimensions d'un cylindre sont $D = (8,4 \pm 0,1) \text{ mm}$ et $h = (11,2 \pm 0,1) \text{ mm}$. Calculez le volume de ce cylindre, ainsi que les incertitudes absolues et relatives sur ces grandeurs.

Exercice 3

Les côtés d'un rectangle sont $a = 5,35 \pm 0,05 \text{ cm}$ et $b = 3,45 \pm 0,04 \text{ cm}$.

1. Calculez le périmètre du rectangle.
2. Calculez l'aire du rectangle.

3. Calculez les incertitudes absolues et relatives sur ces grandeurs.

Exercice 4

Le rayon d'une sphère est $r = 10,00 \pm 0,08 \text{ cm}$

1. Calculez l'aire de sa surface.
2. Calculez son volume.
3. Calculez les incertitudes absolues et relatives sur ces grandeurs.

Exercice 5

Les côtés opposé et adjacent à l'angle θ d'un triangle rectangle sont respectivement $a = 12,1 \pm 0,1 \text{ cm}$ et $b = 23,3 \pm 0,2 \text{ cm}$.

1. Calculez l'angle θ .
2. Calculez la longueur de l'hypoténuse.
3. Calculez les incertitudes absolues et relatives sur ces grandeurs.

Exercice 6

Un volume cylindrique de diamètre $1,62 \pm 0,03 \text{ cm}$ et de hauteur $3,44 \pm 0,05 \text{ cm}$ a une masse de $23,2 \pm 0,1 \text{ g}$.

1. Calculez son volume.
2. Calculez sa masse volumique.
3. Calculez les incertitudes absolues et relatives sur ces grandeurs.

Exercice 7

Suite à une série d'essais, on obtient comme résultats qu'un véhicule roulant à $100 \pm 4 \text{ km/h}$ s'immobilise sur une distance de $48 \pm 1 \text{ m}$. Calculez la décélération moyenne de ce véhicule, ainsi que les incertitudes absolues et relatives sur ces grandeurs.

16.3 Incertitude absolue et relative : exercices complémentaires

Exercice 1

Transformez les incertitudes absolues en incertitudes relatives pour les mesures suivantes :

1. $l = 5,2m \pm 0,2m$
2. $t = (3,0 \pm 0,2) s$
3. $m = (4,42 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} kg$

Exercice 2

Calculez les incertitudes absolues et donnez le résultat arrondi des mesures suivantes :

1. $l = 4,2 m$ à 5%
2. $t = 17,82 m$ à 3%
3. $m = 15,27 kg$ ($\pm 1,5\%$)

Exercice 3

Deux corps de masse $m_1 = (3,00 \pm 0,02) kg$ et $m_2 = 0,275 kg \pm 5\%$ sont liés par un ressort. Calculez la masse totale, ainsi que l'incertitude absolue et relative.

Exercice 4

Un ressort a une longueur $L = (10,00 \pm 0,05) cm$. On suspend un poids pour allonger le ressort. La longueur est alors de $L_0 = (12,53 \pm 0,05) cm$. Calculez l'allongement du ressort, ainsi que l'incertitude absolue et relative.

Exercice 5

Un cycliste pédale pendant 6 heures ± 5 minutes à une vitesse moyenne de $v = (20,0 \pm 0,2) km/h$. Quelle distance a-t-il parcourue ? (Calculez aussi l'incertitude absolue et relative.)

Exercice 6

Déterminez la vitesse, ainsi que l'incertitude absolue et relative, d'une voiture qui a parcouru la distance $d = (50,0 \pm 0,5) m$ dans le temps de $t = (2,86 \pm 0,02) s$.

Exercice 7

Un véhicule consomme $48,6 \pm 0,5$ litres de carburant en parcourant $530 \pm 20 km$. Calculez sa consommation moyenne en litres par 100 km, ainsi que les incertitudes absolues et relatives sur ces grandeurs.

16.4 Chiffres significatifs

Exercice 1

Donnez le bon nombre de chiffres significatifs :

$$3,14159 \quad 1,00 \cdot 10^{-2} \quad 0,10 \cdot 10^3$$

Exercice 2

Donnez les résultats avec le bon nombre de chiffres significatifs :

$$\frac{1,003}{0,9978} \quad \sqrt{100,18} \quad \sqrt[3]{997,9}$$

$$\left(\frac{5,8}{4,5}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \frac{1}{234} + \frac{1}{98,6} \quad \sqrt{5,0}$$

Exercice 3

Peut-on exprimer $100,0 \text{ kg}$ en grammes sous la forme décimale avec le bon nombre de chiffres significatifs ? Expliquez.

Exercice 4

Exprimer chacune des masses suivantes en grammes sous la forme décimale avec le bon nombre de chiffres significatifs :

$$1,00 \text{ g} \quad 0,001 \text{ ng} \quad 100,0 \text{ mg}$$

$$10000 \text{ g} \quad 10,000 \text{ kg} \quad 10^3 \text{ dag}$$

Exercice 5

Déterminer le nombre de chiffres significatifs pour chacune des quantités suivantes :

$$0,002 \quad 0,99 \quad 1,75 \pm 0,02$$

$$1,001 \quad 4,44 \times 10 \quad 0,01 \times 1034$$

Exercice 6

Ecrire la vitesse de la lumière dans le vide (299792458 m/s) avec un, trois, quatre et huit chiffres significatifs.

Exercice 7

Donner la valeur de $\pi = 3,14159265\dots$ à un, trois, quatre et cinq chiffres significatifs.

16.5 Conduite des calculs : intervalle de confiance

Exercice 1

On mesure un temps et on trouve :

3,56 s; 3,58 s; 3,57 s; 3,52 s; 3,54 s; 3,56 s; 3,57 s; 3,53 s; 3,56 s; 3,56 s; 3,57 s; 3,59 s; 3,54 s; 3,56 s.

1. Classez les valeurs trouvées par ordre croissant et donner pour chaque résultat le nombre n de fois où il a été trouvé (fréquence).
2. Calculez la valeur moyenne \bar{t} de la durée et l'étendue r des résultats.
3. Trouvez l'écart type s .
4. Trouvez l'intervalle de confiance pour un niveau de confiance de 95%.

Exercice 2

On a mesuré le diamètre d'une sphère à l'aide d'un palmer. L'incertitude de lecture de l'appareil est de 0,01 mm. On a obtenu les 23 résultats suivants :

12,70; 12,69; 12,64; 12,69; 12,69; 12,69; 12,63; 12,69; 12,71; 12,69; 12,62; 12,69;

12,68; 12,69; 12,65; 12,69; 12,71; 12,69; 12,69; 12,69; 12,69; 12,65; 12,69

1. Classez les valeurs trouvées par ordre croissant et donner pour chaque résultat le nombre n de fois où il a été trouvé (fréquence).
2. Calculez la valeur moyenne \bar{S} de l'aire de la sphère et l'étendue r des résultats.
3. Calculez la valeur moyenne \bar{V} du volume de la sphère et l'étendue r des résultats.
4. Trouvez l'écart type s_S de l'aire.
5. Trouvez l'écart type s_V du volume.
6. Trouvez l'intervalle de confiance pour un niveau de confiance de 99,7% par rapport à l'aire.
7. Trouvez l'intervalle de confiance pour un niveau de confiance de 99,7% par rapport au volume.

Exercice 3

Dans un test de fabrication de composantes d'une chaîne Hi-Fi, la baisse de puissance de sortie des circuits électriques après 2000 heures d'utilisation a été mesurée. Un essai sur 100 composantes identiques a donné les résultats suivants : La baisse de puissance moyenne est de 12 watts. Par ailleurs il est connu que l'écart-type de la baisse de puissance pour ce type de circuit électrique est $\sigma = 2$ watts.

1. Calculez l'intervalle de confiance (approximatif) à 95% de la baisse de puissance moyenne de la fabrication.
2. Recalculez l'intervalle pour un niveau de confiance plus élevé, par exemple 99%.
3. Vérifiez que l'intervalle obtenu dans le point numéro 2 est plus large que celui obtenu dans le point numéro 1. Expliquer ce fait.

16.6 Exercices récapitulatifs

Exercice 1

Le rayon de la Lune est $1,738.10^3 \text{ km}$. En supposant que la Lune est sphérique, quel est son volume avec deux chiffres significatifs ?

Exercice 2

Calculez, avec le bon nombre de chiffres significatifs, l'aire et la circonférence des cercles de diamètres :

$$\begin{array}{lll} 5,42 \text{ m} & 0,5420 \text{ nm} & 5,420 \text{ mm} \\ 542,0 \text{ m} & 0,542 \text{ km} & 0,005420.10^{-4} \mu\text{m} \end{array}$$

Exercice 3

On mesure le volume d'un morceau de fer parallélépipédique de trois façons.

1. On le mesure avec une règle graduée au mm . On peut apprécier la demi division. On trouve $L = 2,6 \text{ cm}$, $l = 1,25 \text{ cm}$ et $h = 5,45 \text{ cm}$. Trouver son volume, ainsi que les incertitudes absolue et relative.
2. On se sert d'un pied à coulisse de précision $\frac{1}{10}^e$ de mm . On trouve $L = 2,62 \text{ cm}$, $l = 1,24 \text{ cm}$ et $h = 5,46 \text{ cm}$. Trouver son volume, ainsi que les incertitudes absolue et relative.
3. On se sert maintenant d'une éprouvette. Une division correspond à 1 cm^3 . On apprécie la demi-division. On trouve, par déplacement d'eau, un volume de $17,5 \text{ cm}^3$. Trouver son volume, ainsi que les incertitudes absolue et relative.
4. Quelle est la meilleure méthode ?

Exercice 4

Calculez

1. $\frac{\Delta E_p}{E_p}$, sachant que $E_p = mgh$.
2. $\frac{\Delta F_e}{F_e}$, sachant que $F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2}$.
3. $\frac{\Delta p}{p}$, sachant que $p.V = n.R.T$.
4. $\frac{\Delta v}{v}$, sachant que $E_c = m \frac{v^2}{2}$
5. $\frac{\Delta m}{m}$, sachant que $F_2 - F_1 = m a_2 - m a_1$

16.7 Coefficient $t_{\alpha,n}$ de Student pour un niveau de confiance α

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{0,95;n}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26
$t_{0,99;n}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25
n	12	14	16	18	20	30	50	100	$+\infty$
$t_{0,95;n}$	2,20	2,16	2,13	2,11	2,09	2,04	2,01	1,98	1,96
$t_{0,99;n}$	3,11	3,01	2,95	2,90	2,86	2,76	2,68	2,63	2,57

Coefficient de Student pour un niveau de confiance de $\alpha = 99,7\%$

n	$t_{0,997;n}$	n	$t_{0,997;n}$	n	$t_{0,997;n}$	n	$t_{0,997;n}$
1	212,2050	11	3,7890	21	3,3548	21	3,2206
2	18,2163	12	3,7065	22	3,3353	22	3,2121
3	8,8915	12	3,6389	23	3,3175	33	3,2042
4	6,4348	14	3,5827	24	3,3016	34	3,1967
5	5,3760	15	3,5350	25	3,2870	35	3,1897
6	4,8002	16	3,4942	26	3,2736	36	3,1832
7	4,4421	17	3,4589	27	3,2613	37	3,1770
8	4,1991	18	3,4279	28	3,2499	38	3,1711
9	4,0240	19	3,4007	29	3,2394	39	3,1656
10	3,8920	20	3,3764	30	3,2296	40	3,1604

Chapitre 17

Optique

17.1 Réfraction

Exercice 1

Soient deux milieux, air et verre ($n_{verre} = 1,5$). Déterminer l'angle du faisceau se propageant du verre dans l'air pour un angle d'incidence de 10° , 20° , 30° , 40° et 50° . Que remarque-t-on ?

Calculez l'angle limite et concluez.

Exercice 2

Calculez l'angle limite des couples de milieux suivants. Précisez, pour chaque cas, le milieu dans lequel pourrait se produire la réflexion totale.

Calculez aussi la vitesse de la lumière dans ces différents milieux.

1. air - eau ($n_{eau} = \frac{4}{3}$)
2. air - diamant ($n_{diamant} = 2,4$)
3. eau - diamant
4. eau - plexiglass ($n_{plexi} = \frac{3}{2}$)
5. verre - diamant ($n_{verre} = n_{plexi} = 1,5$)
6. verre - sulfure de carbone ($n_{CS_2} = 1,6$)

Exercice 3

Un faisceau se propage du diamant dans du plexiglass.

1. Dans quel milieu pourrait se produire la réflexion totale ?
2. Calculez l'angle limite de réfraction.
3. Calculez les angles de réfraction correspondants aux angles d'incidence de 0° , 20° , 30° et 60° .

Exercice 4

Un faisceau lumineux se propage d'un milieu d'indice $n_1 = 1,7$ vers un milieu d'indice $n_2 = 1,2$ et vice-versa.

1. Dans quel milieu pourrait se produire la réflexion totale ?
2. Calculez l'angle limite de réfraction.
3. Complétez le tableau suivant :

θ_1	10°		52°
θ_2		30°	

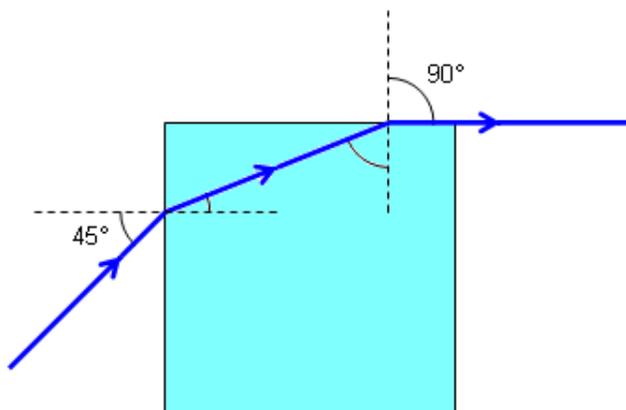
Exercice 5

L'oeil d'un plongeur est situé dans l'eau à 1 m de la surface libre. Précisez la forme et la grandeur de la portion de surface libre, seule traversée par la lumière, qui permet à l'oeil de voir les objets situés au-dessus du plan de la surface libre ($n_{\text{eau}} = \frac{4}{3}$).

Exercice 6

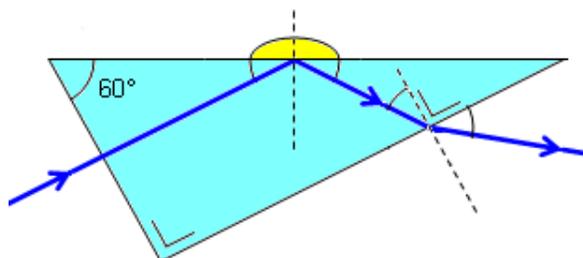
Un rayon lumineux traverse l'une des faces d'un cube en matière transparent sous une incidence de 45° puis rencontre une deuxième face perpendiculaire à la première.

En admettant que le plan d'incidence soit normal à ces deux faces et que le rayon lumineux sorte dans l'air en rasant la face de sortie, calculez l'indice de la substance composant le cube.

**Exercice 7**

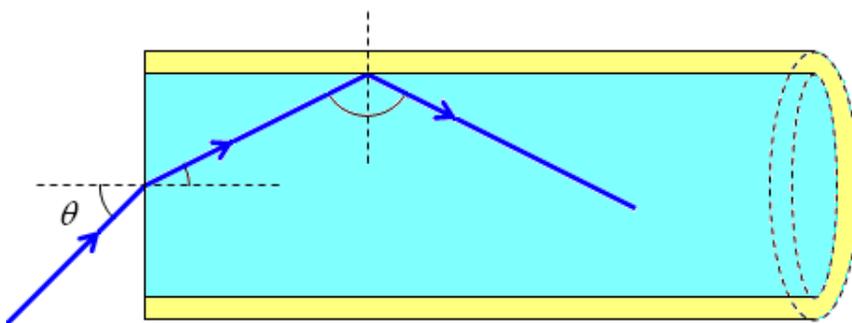
La section d'un prisme en verre d'indice $n = 1,5$ par un plan perpendiculaire aux arêtes à la forme d'un triangle rectangle dont un des angles vaut 60° . Sur la face hypoténuse, disposée horizontalement, est placée une goutte d'un liquide transparent.

On considère un rayon incident normal à la petite face. Ce rayon touche alors la surface de séparation verre - liquide. Quelle condition doit remplir l'indice de réfraction du liquide pour qu'il y ait réflexion totale dans le prisme ?



Exercice 8

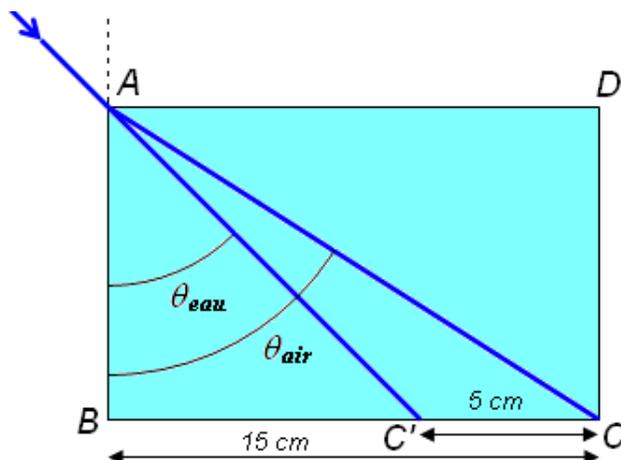
Une fibre optique comporte un coeur et une gaine d'indices de réfraction respectifs $n_{\text{coeur}} = 1,62$ et $n_{\text{gaine}} = 1,52$. Calculez l'angle d'acceptance θ de la fibre optique.



Exercice 9

Un récipient de section verticale rectangulaire $ABCD$ a une base horizontale BC de 15 cm de longueur. Lorsqu'il est vide, on fait passer l'axe d'un faisceau lumineux par la diagonale AC . Ensuite, on le remplit d'eau ($n_{\text{eau}} = \frac{4}{3}$) jusqu'au bord. L'axe du faisceau suit alors le trajet AC' tel que $|CC'| = 5\text{ cm}$.

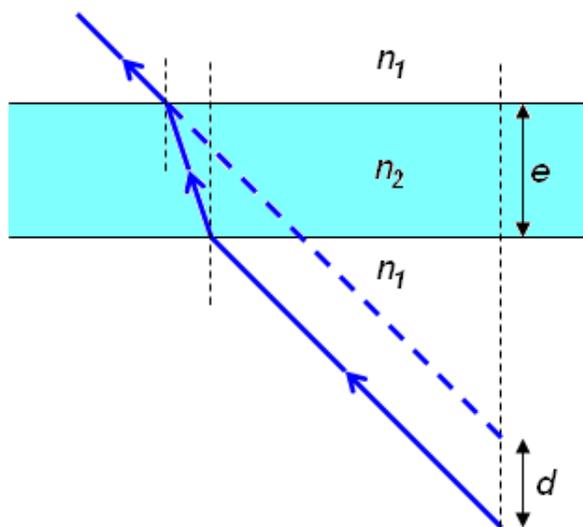
Déterminez la profondeur $|AB|$ du récipient.



Exercice 10

Soit une lame à faces parallèles d'indice n_2 séparant 2 milieux identiques d'indice n_1 . En faisant l'hypothèse du stigmatisme approché (on ne s'éloigne pas trop de la normale) et en prenant $n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}$, démontrez que le déplacement d d'un objet vu par un observateur à travers la lame à faces parallèles d'épaisseur e est donné par

$$d = e\left(1 - \frac{1}{n_{2,1}}\right)$$



Chapitre 18

Mécanique rationnelle

18.1 Calcul vectoriel

Exercice 1 : les bases

Soient 2 vecteurs $\vec{a} \equiv (-6, 0)$ et $\vec{b} \equiv (3, 4)$. Calculer et illustrer graphiquement

1. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$, $2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$
2. les normes des vecteurs \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$
3. l'angle compris entre \vec{a} et \vec{b} , entre \vec{a} et $\vec{a} + \vec{b}$, entre \vec{b} et $\vec{a} + \vec{b}$, entre $\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{a} - \vec{b}$, entre $\vec{a} - \vec{b}$ et $\vec{b} - \vec{a}$

Exercice 2 : projections orthogonales

Soient 2 vecteurs $\vec{a} \equiv (-6, 0)$ et $\vec{b} \equiv (3, 4)$. Calculer les projections orthogonales suivantes et illustrer graphiquement

1. \vec{a} et \vec{b} sur l'axe Ox
2. \vec{a} et \vec{b} sur l'axe Oy
3. \vec{a} sur \vec{b}
4. \vec{b} sur \vec{a}
5. \vec{a} et \vec{b} sur la droite d'équation $d \equiv y = 2x + 3$
6. $\vec{a} + \vec{b}$ sur l'axe Ox
7. $\vec{a} + \vec{b}$ sur l'axe Oy
8. $\vec{a} + \vec{b}$ sur la droite d'équation $d \equiv y = 2x + 3$
9. $\vec{a} + \vec{b}$ sur la droite d'équation $d \equiv y = -x + 1$

Exercice 3 : produit scalaire

Soient les vecteurs $\vec{u} \equiv (2, 3)$, $\vec{v} \equiv (-4, 5)$, $\vec{w} \equiv (2, -4)$, $\vec{x} \equiv (1, 0)$, $\vec{y} \equiv (0, 1)$ et $\vec{z} \equiv (1, 1)$. Calculer

1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$, $\vec{w} \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \cdot \vec{y}$, $\vec{y} \cdot \vec{z}$, $\vec{z} \cdot \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w}$, $(\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{w}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{z})$, $(\vec{u} - \vec{z}) \cdot (\vec{z} - \vec{u})$, $(\vec{w} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{z})$, $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot (\vec{z} - \vec{y})$

Exercice 4 : vecteurs unitaires

Sachant que $\vec{a} \equiv (-6, 0)$ et $\vec{b} \equiv (3, 4)$. Calculer

1. $\vec{1}_a$ et $\vec{1}_b$
2. le vecteur unitaire correspondant à $2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$
3. le vecteur unitaire $\vec{1}_v$ correspondant à $\vec{v} \equiv (\sin \theta, \cos \theta)$

Exercice 5 : produit vectoriel et produit scalaire

Soient les vecteurs $\vec{u} \equiv (2, 3)$, $\vec{v} \equiv (-4, 5)$, $\vec{w} \equiv (2, -4)$, $\vec{x} \equiv (1, 0)$, $\vec{y} \equiv (0, 1)$ et $\vec{z} \equiv (1, 1)$. Calculer les normes des produits vectoriels suivants en utilisant, si c'est nécessaire, le produit scalaire pour obtenir l'angle α entre 2 vecteurs.

1. $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$, $\vec{w} \times \vec{x}$, $\vec{x} \times \vec{y}$, $\vec{y} \times \vec{z}$, $\vec{z} \times \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{w}) \times \vec{v}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$, $(\vec{w} - \vec{u}) \times \vec{w}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{v}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{w} + \vec{z})$, $(\vec{u} - \vec{z}) \times (\vec{z} - \vec{u})$, $(\vec{w} + \vec{v}) \times (\vec{v} + \vec{z})$, $(\vec{u} + \vec{w}) \times (\vec{z} - \vec{y})$

Exercice 6 : problème

Soit un losange $ABCD$ où la longueur de la grande diagonale vaut $|AC| = 24 \text{ cm}$ et la longueur de la petite diagonale vaut $|BD| = 10 \text{ cm}$.

1. Que vaut la longueur du côté du losange ?
2. Que vaut l'angle α formé par les côtés AB et AD du losange ?
3. Que vaut l'angle β formé par les côtés BA et BC du losange ?
4. Que vaut l'aire de ce losange ? (utiliser le produit vectoriel)

Exercice 7 : problème

Démontrer avec le produit scalaire que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires

18.2 Cinématique

18.2.1 Vitesse et accélération

Exercice 1 : vitesse moyenne

Un mobile a pour équation de position $r(t) = a t^3 + b t^2 + c t + d$ où $a = 1 \text{ m/s}^3$, $b = -1 \text{ m/s}^2$, $c = 10 \text{ m/s}$ et $d = -100 \text{ m}$. Calculer

1. la vitesse moyenne entre $t_1 = 0 \text{ s}$ et $t_2 = 10 \text{ s}$
2. la vitesse moyenne entre $t_1 = 5 \text{ s}$ et $t_2 = 15 \text{ s}$
3. la vitesse moyenne entre $t_1 = 10 \text{ s}$ et $t_2 = 20 \text{ s}$
4. la vitesse moyenne entre $t_1 = 0 \text{ s}$ et $t_2 = 20 \text{ s}$

Exercice 2 : accélération moyenne

Un mobile a pour équation de vitesse $v(t) = a t^2 + b t + c$ où $a = 3 \text{ m/s}^3$, $b = -2 \text{ m/s}^2$ et $c = 10 \text{ m/s}$. Calculer

1. l'accélération moyenne entre $t_1 = 0 \text{ s}$ et $t_2 = 10 \text{ s}$
2. l'accélération moyenne entre $t_1 = 5 \text{ s}$ et $t_2 = 15 \text{ s}$
3. l'accélération moyenne entre $t_1 = 10 \text{ s}$ et $t_2 = 20 \text{ s}$
4. l'accélération moyenne entre $t_1 = 0 \text{ s}$ et $t_2 = 20 \text{ s}$

Exercice 3 : vitesse et accélération moyenne et instantannée

Un mobile a pour équation

$$\begin{array}{ll} \text{de position} & r(t) = a t^3 + b t^2 + c t + d \\ \text{de vitesse} & v(t) = 3a t^2 + 2b t + c \\ \text{d'accélération} & acc(t) = 6a t + 2b \end{array}$$

1. – Si l'accélération instantannée du mobile vaut $acc(t) = 2 \text{ m/s}^2$ à $t = 0 \text{ s}$
- Si la vitesse instantannée du mobile vaut $v(t) = -51 \text{ m/s}$ à $t = 0 \text{ s}$
- Si la position du mobile vaut $r(t) = 10 \text{ m}$ à $t = 0 \text{ s}$
- Si la position du mobile vaut $r(t) = 100 \text{ m}$ à $t = 10 \text{ s}$

Déterminer les constantes a , b , c et d .

2. Calculer la vitesse moyenne et l'accélération moyenne du mobile pour les intervalles de temps

t_1	0	0	0	0	5	5	5	10	10	15
t_2	5	10	15	20	10	15	20	15	20	20

Exercice 4 : vitesse et accélération moyenne et instantannée, dérivées

$$\frac{d}{dt}(k t^n) = k \frac{d}{dt}(t^n) = k n t^{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dt^2}(k t^n) = k \frac{d^2}{dt^2}(t^n) = k n \frac{d}{dt}(t^{n-1}) = k n(n-1)t^{n-2}$$

$$\frac{d}{dt}(f(t) + g(t)) = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

1. Déterminer l'équation de la vitesse d'un mobile ayant $r(t) = 3t^4 - 6t^2$ comme équation de position
2. Calculer la vitesse instantannée pour $t = 0, 5$ et 10 s.
3. Calculer la vitesse moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0, 5), (0, 10)$ et $(5, 10)$ secondes.
4. Déterminer l'équation de l'accélération de ce mobile
5. Calculer l'accélération instantannée pour $t = 0, 5$ et 10 s.
6. Calculer l'accélération moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0, 5), (0, 10)$ et $(5, 10)$ secondes.

Exercice 5 : vitesse et accélération moyenne et instantannée, dérivées

$$\frac{d}{dt}(k \sin \omega t) = k \frac{d}{dt}(\sin \omega t) = k \omega \cos \omega t \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(k \cos \omega t) = k \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = -k \omega \sin \omega t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(k \sin \omega t) = k \omega \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = -k \omega^2 \sin \omega t \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dt^2}(k \cos \omega t) = -k \omega \frac{d}{dt}(\sin \omega t) = -k \omega^2 \cos \omega t$$

1. Déterminer l'équation de la vitesse d'un mobile ayant $r(t) = 3 \sin(\pi t)$ comme équation de position
2. Calculer la vitesse instantannée pour $t = 0, 5$ et 10 s.
3. Calculer la vitesse moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0, 5), (0, 10)$ et $(5, 10)$ secondes.
4. Déterminer l'équation de l'accélération de ce mobile
5. Calculer l'accélération instantannée pour $t = 0, 5$ et 10 s.
6. Calculer l'accélération moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0, 5), (0, 10)$ et $(5, 10)$ secondes.
7. Illustrer graphiquement le mouvement du mobile. De quel type de mouvement s'agit-il ?
 - mouvement circulaire uniforme ?
 - mouvement rectiligne uniforme ?
 - mouvement rectiligne uniformément accéléré ?
 - S'il ne s'agit d'aucun de ces mouvements, comment le décrire ?

Exercice 6 : hodographe, dérivées, déplacement d'un mobile dans un plan

Soit un mobile ayant comme équations paramétriques de position

$$\begin{cases} r_x(t) &= \frac{1}{8}t^3 - \frac{2}{5}t^2 + 2t - 10 \\ r_y(t) &= -5t + 17 \end{cases}$$

1. Faire un graphique du mouvement du mobile dans un repère orthonormé Oxy .
2. Tracer l'hodographe des vitesses entre $t = 0$ s et $t = 5$ s.
3. Déterminer graphiquement la projection orthogonale sur l'axe Ox de la distance atteinte par le mobile pour $t = 5, 10, 15$ et 20 s.
4. Déterminer graphiquement la projection orthogonale sur l'axe Oy de la distance atteinte par le mobile pour $t = 5, 10, 15$ et 20 s.
5. Déterminer la distance atteinte par le mobile pour $t = 5, 10, 15$ et 20 s.
 - a) par calcul
 - b) en utilisant les résultats des projections orthogonales des points 3 et 4
6. Calculer la norme de la vitesse instantanée du mobile pour $t = 5, 10, 15$ et 20 s.
7. Calculer la norme de la vitesse moyenne du mobile pour les intervalles de temps

t_1	0	0	0	0	5	5	5	10	10	15
t_2	5	10	15	20	10	15	20	15	20	20

Exercice 7 : problème

Luke Skywalker part d'Aldébaran dans une navette et fonce dans un vortex. Il voyage alors à la vitesse moyenne de 150 fois la vitesse de la lumière pendant les 8 premières minutes de son déplacement, à 300 fois pendant les 3 minutes suivantes, etc (voir tableau). La navette s'immobilise dans la cour du château de Champignac-en-Cambrousse après 45 minutes de trajet.

vitesse ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s)	150	300	600	400	200
intervalle de temps (min)	8	3	7	15	12

Quelle distance totale Luke a-t-il parcouru d'Aldébaran à Champignac-en-Cambrousse ? Estimer cette distance en années-lumières, sachant qu'une année lumière est la distance parcourue dans le vide par la lumière pendant une année terrestre (365,25 jours).

18.2.2 Mouvement rectiligne

Exercice 1 : les bases, MRUA

L'équation du mouvement rectiligne d'un mobile est $r(t) = -5t^2 + 5t + 10$ (unités SI). Calculer la vitesse du mobile à l'instant 5 s et son accélération aux instants 0 et 10 s.

Exercice 2 : problème, MRUA

Un avion part du repos et s'élance pour décoller avec une accélération de 4 m/s². Calculer

1. la distance parcourue par l'avion après 5 s

2. la vitesse atteinte par l'avion après 5 s.

Exercice 3 : problème, MRUA

Au CERN, des protons émergent d'un accélérateur de particules linéaire de 0,8 km avec une vitesse de $2,5 \cdot 10^8$ m/s.

1. Si l'accélération est uniforme, quelle est sa valeur ?
2. Combien de temps faut-il aux protons pour parcourir l'accélérateur ?

Exercice 4 : problème, MRUA

Un train a une vitesse initiale de 30 m/s. Il freine et s'arrête avec une décélération uniforme en 50 secondes.

1. Que vaut la décélération du train ?
2. Quelle distance parcourt-il avant de s'arrêter ?

Exercice 5 : problème, MRUA

Une voiture roule à 15 m/s et percute un mur de pierres.

1. Un passager portant sa ceinture de sécurité s'immobilise sur une distance de 1 m. Que vaut la décélération moyenne de cette personne ?
2. Le nez d'un autre passager, sans ceinture de sécurité frappe le pare-brise et s'immobilise sur une distance de 0,01 m. Quelle est la décélération moyenne subie par le nez de ce passager ?

Exercice 6 : mouvement rectiligne dans un plan

Un mobile se déplace dans un plan Oxy . Ses équations paramétriques du mouvement sont (en unités SI)

$$\begin{cases} r_x(t) &= \frac{t^2}{2} \\ r_y(t) &= 1 - t^2 \end{cases}$$

1. Représenter, à l'échelle (identique pour chaque axe), les positions occupées par le mobile entre $t = 0$ et 1 seconde.
2. Déterminer l'équation de la trajectoire dans le plan.
3. Déterminer les équations de la vitesse et de l'accélération. Que peut-on dire des vecteurs vitesse et accélération ?
4. Calculer les coordonnées de ces vecteurs et leur norme à l'instant $t = 0,4$ s.
5. Représenter ces vecteurs à cet instant.

Exercice 7 : problème

Près de la planète Omicron Perseï 8, un tyran sanguinaire du nom de Rrrrh se prépare à envoyer un missile autoguidé à plasma en direction de la terre. Le missile, initialement au repos, est mis à feu avec une accélération constante et parcourt une distance de 0,5 années-lumières. Son moteur à distorsion spatio-temporelle lui permet d'acquérir une vitesse de croisière de 0,9 années-lumières par seconde, après quoi sa vitesse reste constante.

1. Que vaut l'accélération du missile ?
2. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir la distance de 0,5 années-lumières et détruire la terre, située à 1486,37 années-lumières ?

18.2.3 Chutte d'un corps

Exercice 1

Quelle doit être la hauteur d'une chute d'eau pour que l'eau atteigne la roue d'une turbine avec une vitesse verticale de 30 m/s ? (On néglige les forces de frottement)

Exercice 2

Colt Silver tombe à pic d'un pont et atteint l'eau après 5 s. On néglige les forces de frottement.

1. Quelle est la vitesse de l'homme qui tombe à pic au moment où il touche l'eau ?
2. Quelle est la hauteur du pont ?

Exercice 3

Un obus anti-aérien est tiré à la verticale avec une vitesse initiale de 500 m/s . On néglige les forces de frottement.

1. Calculer la hauteur maximum atteinte par l'obus
2. Quel temps lui faut-il pour atteindre cette hauteur ?
3. A quel moment l'obus atteindra-t-il une hauteur de 1000 m ?
4. A quel moment l'obus atteindra-t-il une hauteur de 3000 m ?

Exercice 4

Une bombe à eau remplie de peinture est lancée vers le bas par un psychopathe, en direction d'un pare-brise de Rolls-royce avec chauffeur, du haut d'un des ponts qui passent au dessus du ring de Charleroi, avec une vitesse initiale de 10 m/s . Elle atteint le pare-brise après 3 s. On néglige les forces de frottement.

1. Quelle est la vitesse de la bombe à eau lorsqu'elle touche le pare-brise et aveugle le chauffeur ?
2. Quelle est la hauteur du pont ?
3. A quelle distance du pont se trouvait la Rolls-royce si celle-ci se déplaçait à la vitesse constante de 90 km/h avant l'impact ?

Exercice 5

Une voiture qui se déplace à la vitesse de 108 km/h entre en collision frontale avec une autre voiture roulant à 90 km/h . Les deux vitesses s'additionnant, de quelle hauteur faudrait-il que les voitures tombent pour subir le même choc ? (On néglige les forces de frottement)

Exercice 6

Un enfant, se trouvant à côté d'un immeuble, lance une balle vers le haut avec une vitesse de 15 m/s . (On néglige les forces de frottement)

1. Quelle hauteur la balle atteindra-t-elle ?
2. Combien de temps faudra-t-il à la balle pour atteindre cette hauteur ?
3. Un autre enfant se penche à la fenêtre, à 6 m de haut, et tente d'attraper la balle. A quel moment la balle passera-t-elle à sa hauteur ?
4. De combien de temps disposera-t-il pour se concentrer s'il rate la balle la première fois ?

Exercice 7

Une fusée d'essai pilotée par Clint Eastwood est lancée à la verticale, à partir du sol, avec une accélération constante de 50 m/s^2 . Elle épuise son carburant après 4 s . Grâce aux techniciens d'Hollywood, nous pouvons négliger la résistance de l'air. Trouver

1. la hauteur atteinte par la fusée lorsque le moteur s'arrête,
2. la hauteur maximum atteinte par la fusée,
3. la durée du vol jusqu'à la hauteur maximum.
4. Si Clint Eastwood est capable de signer 37 autographes à la minute (son organisme supporte les accélérations à la perfection), combien d'autographes pourra-t-il signer du départ de la fusée jusqu'à son amerissage au milieu de l'océan pacifique ?

18.2.4 Mouvement circulaire**Exercice 1 : les bases, MCU**

Le rayon de l'orbite lunaire vaut environ 384000 km , la période de révolution de la lune autour de la terre est de $T = 27,32$ jours.

1. Déterminer l'accélération normale de la lune.
2. Déterminer sa vitesse instantannée.
3. Déterminer sa vitesse angulaire.

Exercice 2 : les bases, MCU

Le rayon de la terre fait en moyenne 6380 km .

1. Calculer l'angle balayé par un méridien, en 6 h, par suite du mouvement de rotation de la terre.
2. Calculer la vitesse angulaire d'un point situé à l'équateur.
3. Calculer la vitesse linéaire d'un point situé à l'équateur.
4. Calculer la vitesse linéaire d'un point situé à la latitude de 50° .

Exercice 3 : MCU, équations du mouvement

Un mobile se déplace dans un plan Oxy . Les équations paramétriques du mouvement dans ce plan sont

$$\begin{cases} r_x(t) = 2 \sin 2\pi t \\ r_y(t) = 2 \cos 2\pi t \end{cases} \quad \text{exprimées en } cm$$

1. Ecrire l'équation de la trajectoire du point.
2. Calculer la vitesse du point à un instant quelconque, en tirer les conclusions.
3. Calculer l'accélération en fonction du temps et la représenter aux instants $t = 0, T/4, T/2, 3T/4$ et T secondes (où T est la période du mouvement).
4. Représenter graphiquement l'hodographe des vitesses.

Exercice 4 : MCU, équations du mouvement

On établit entre les plaques verticales d'un oscilloscope une tension $y = A \sin \omega t$ et entre les plaques horizontales une tension $x = A \sin(\omega t + \phi)$

1. Quel type de courbe observe-t-on si $\phi = \frac{\pi}{2}$?
2. Que devient cette courbe si $\phi = 0$?

Exercice 5 : problème

Une bille métallique de faibles dimensions est suspendue à un fil de longueur 1 m. On le fait tourner autour d'un axe vertical de telle façon que la bille décrit une trajectoire circulaire dans un plan horizontal. Le fil fait un angle de 30° avec l'axe de rotation. Quelle est la période du mouvement de la bille ?

Exercice 6 : problème

L'aviateur Howard Hughes, interprété par Leonardo Di Caprio, effectue un looping dans un plan vertical en 10 s. Le rayon du cercle décrit vaut 100 m.

1. Que vaut la vitesse angulaire (exprimée en rad/s) ?
2. Quelle est l'accélération radiale de Leonardo Di Caprio ?
3. En supposant que l'accélération de la force fictive exercée sur le pilote (force centrifuge) est l'opposé son accélération normale, quelle devrait être la vitesse minimum de l'avion pour éviter à notre ami de tomber lorsque celui-ci a la tête en bas ?

Exercice 7 : problème

Un motocycliste tourne sur une plaine horizontale à la vitesse de 54 km/h . Quel est le rayon de la trajectoire circulaire qu'il peut décrire, sachant qu'il peut tout au plus s'incliner de 25° par rapport à la verticale ? (Conseil : considérer l'angle entre l'accélération de la gravité \vec{g} et l'accélération normale \vec{a}_n)

18.2.5 Mouvement d'un projectile sans frottements (P_{tir})**Exercice 1**

Quelle est la vitesse initiale d'une sauterelle au moment où elle quitte le sol, si l'angle du saut est 55° et si la portée est $0,8 \text{ m}$?

Exercice 2

Mpenza frappe sur un ballon placé au sol. Il manque et sa chaussure part avec une vitesse initiale de 25 m/s en faisant un angle de 30° avec l'horizontale.

1. Quand la chaussure atteint-elle sa hauteur maximum ?
2. Si les buts de De Wulf se trouvent à 35 m d'où il shoote, sa chaussure menacera-t-elle le célèbre gardien ?
3. Que vaut l'angle de lancement pour que la portée de la chaussure soit maximale ?
4. Si Mpenza avait tiré avec cet angle optimal, sa chaussure serait-elle entrée dans les buts d'une hauteur de $2,5 \text{ m}$?

Exercice 3

Un point se déplace dans un plan Oxy . Les équations paramétriques de son mouvement sont données par

$$\begin{cases} r_x(t) = 5t + 2 \\ r_y(t) = -5t^2 \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation de sa trajectoire.
2. Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération à instants $t = 0$ et 6 s .
3. Représenter graphiquement la trajectoire du point.
4. Représenter graphiquement l'hodographe des vitesses.

Exercice 4

Un obus est tiré d'un mortier artisanal avec un angle de 75° et une vitesse initiale de 70 m/s .

1. Calculer le temps de montée de l'obus.
2. Calculer la hauteur maximum atteinte par l'obus.

3. Calculer la portée de l'obus.
4. Déterminer la portée maximum correspondant à l'angle de tir optimal.
5. Quelle hauteur maximum peut atteindre l'obus? Est-ce sans risque?
6. Faire le graphique de la parabole de sûreté.
7. Si un tank yankee se trouve sur une hauteur de 18 m et à une distance de 400 m , pourra-t-il être détruit par le mortier des combattants de la liberté de la république démocratique de Los Bananas?

Exercice 5

Une balle est lancée horizontalement d'une fenêtre située à 15 m du sol à la vitesse de 20 m/s .

1. Quand la balle touchera-t-elle le sol?
2. Où la balle va-t-elle retomber?

Exercice 6

Thomas Beckett, un sniper inexpérimenté planque depuis 2 semaines dans l'appartement situé en face de l'hôtel Piazza. Il tient sa cible dans sa ligne de mire. Sa cible, un homme d'une quarantaine d'années, chauve et bedonnant, qui prend l'air appuyé sur le balcon de la terrasse de son penthouse de Las Vegas, se trouve à 200 m , à la même hauteur que le fusil. Si la balle quitte le canon avec une vitesse initiale de 500 m/s , de combien la balle manquera-t-elle sa cible?

Exercice 7

Un bombardier, au cours d'une descente en piqué à 53° par rapport à la verticale, laisse tomber une bombe à une altitude de 730 m . La bombe explose au sol 5 s plus tard.

1. Quelle était la vitesse du bombardier lorsqu'il a largué la bombe?
2. Quelle était la distance horizontale parcourue par la bombe?
3. Quelles étaient les composantes horizontale et verticale de la vitesse de la bombe, juste avant de toucher le sol?

18.2.6 Exercices récapitulatifs

Exercice 1

Un point se déplace dans un plan Oxy . Les équations paramétriques de son mouvement sont données par (en unités SI)

$$\begin{cases} r_x(t) &= t - 2 \\ r_y(t) &= t^2 + 4 \end{cases}$$

1. Représenter quelques positions du point dans le plan entre -3 et 2 s .
2. Représenter les vecteurs vitesse et accélération aux instants 0, -1 et 2 s .

3. Déterminer l'équation de la trajectoire du point.

Exercice 2

Un joueur de base-ball rattrape une balle qui a une vitesse de 30 m/s .

1. S'il ne déplace pas la main, la balle s'immobilise dans son gant en parcourant une distance de 1 cm . Que vaut la décélération moyenne ?
2. Si, en attrapant la balle, il déplace la main de manière à ce que la balle s'arrête sur une distance de 10 cm , que vaut la décélération ?

Exercice 3

Un sac de sable lâché d'un ballon, atteint le sol après 15 s . Quelle était la hauteur du ballon si, initialement, celui-ci

1. était immobile ?
2. descendait à une vitesse de 20 m/s ?
3. montait à une vitesse de 20 m/s ?

Exercice 4

Une balle est fixée à l'une des extrémités d'un fil de 24 cm de longueur, dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe. On l'oblige à décrire une circonférence dans un plan horizontal, centrée sur la verticale passant par le point fixe. Déterminer la vitesse et l'accélération de la balle lorsque le fil forme un angle de 30° avec la verticale.

Exercice 5

Un membre d'une des triades lâche un indicateur de la police de Hong-Kong dans un puits et on l'entend toucher l'eau 3 s plus tard. Si le son se propage à la vitesse de 344 m/s , quelle est la profondeur du puits ?

Exercice 6

Le colonel Austin, l'homme qui valait 3 milliards, tente d'attraper un homme qui s'enfuit à bord d'une voiture de sport. La distance entre eux est de 100 m au moment où la voiture commence son accélération. Cette accélération est constante et vaut 5 m/s^2 . Les jambes bioniques du colonel Austin lui permettent de courir à la vitesse de 30 m/s .

1. Arrivera-t-il à arrêter les méchants et à sauver le monde ?
2. Si non, quelle vitesse minimale le super ordinateur cybernétique de Lee Majors devra-t-il imposer aux jambes pour permettre à l'acteur de rattraper les méchants et empêcher la 3^{ème} guerre mondiale ?

Exercice 7

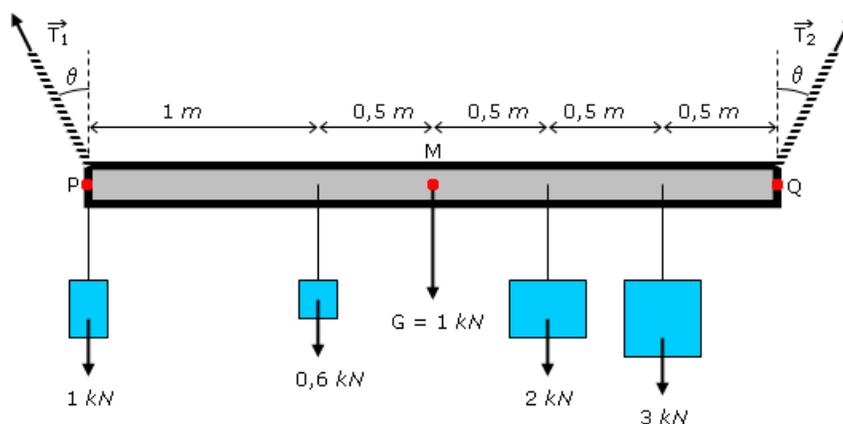
Supposons que Batman soit initialement suspendu, ses pieds se trouvant à 10 m au-dessus du sol et à 15 m à droite d'un canon qui pointe sur lui. Batman commence à tomber au moment où le joker coupe la corde qui le suspend et actionne le canon. Le boulet part avec une vitesse de 20 m/s et un angle de 10° avec l'horizontale

1. Quelles sont les composantes verticales et horizontales de la vitesse initiale du boulet ?
2. Combien de temps faut-il pour que la position horizontale du boulet varie de 15 m ?
3. Quelles sont, à cet instant, les positions verticales du boulet et de batman ?
4. Est-ce la fin de batman, si celui-ci mesure $1,80\text{ m}$?

18.3 Statique**18.3.1 Moments de forces et équilibre des corps solides****Exercice 1**

Trouver la valeur et le signe de chaque moment (par convention, signe positif si le moment implique une rotation dans le sens trigonométrique et signe négatif si le moment implique une rotation dans le sens horlogique) de chaque poids (ne pas prendre en compte \vec{T}_1 et \vec{T}_2)

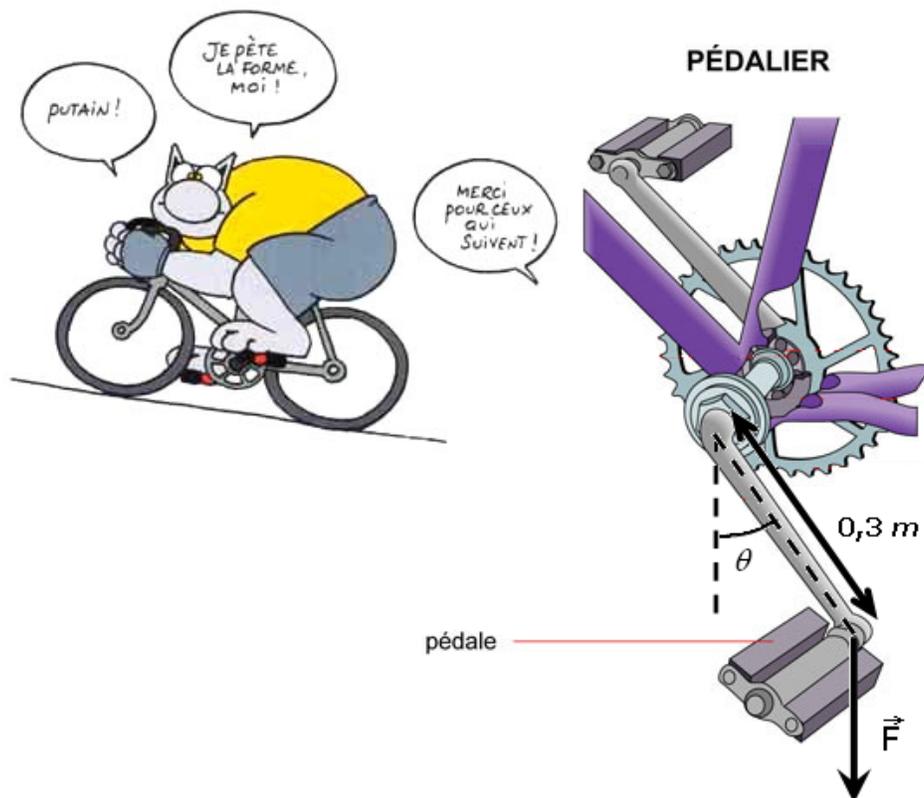
- par rapport au point P ,
- par rapport au point M ,
- par rapport au point Q .

**Exercice 2**

Un cycliste exerce, sur la pédale de son vélo, une force \vec{F} dirigée vers le bas et valant 100 N .

- Trouver la grandeur et la direction des moments pour $\theta = 53^\circ$, -45° et 90° .

- À quelle position correspond le moment maximum ?



Exercice 3

Dans une chaîne de montage, une voiture, en cours de montage, est supportée par deux câbles. La voiture est schématisée par une barre de poids négligeable à laquelle s'accroche différents poids ponctuels. Evaluer les tensions T_1 et T_2 dans les câbles (voir figure 18.3.1).

- Si les câbles forment un angle de 0° avec la verticale.
- Si les câbles forment un angle de 30° avec la verticale.
- Si les câbles forment un angle de 45° avec la verticale.
- Si les câbles forment un angle de 60° avec la verticale.

Exercice 4

Deux enfants sont en équilibre sur une balançoire de poids négligeable. Le premier enfant pèse 160 N . Il est assis à $1,5\text{ m}$ du point d'appui. Le second enfant est assis à 2 m de l'autre côté par rapport au point d'appui. Quel est le poids du second enfant ?

Exercice 5

On a suspendu à un fil du linge humide. Le fil aura-t-il tendance à casser plus facilement si le fil est

fortement tendu ou si au contraire il est lâche ? Expliquer.

Exercice 6

Deux poids sont suspendus aux extrémités d'une barre horizontale d'un mètre de longueur. Si le poids en $x = 0$ est de 10 N et si le centre de gravité se trouve en $x = 0,8\text{ m}$, quel poids est placé en $x = 1\text{ m}$?

- Si l'on néglige le poids de la barre.
- Si la barre, homogène, pèse $\frac{10}{3}\text{ N}$.

Exercice 7

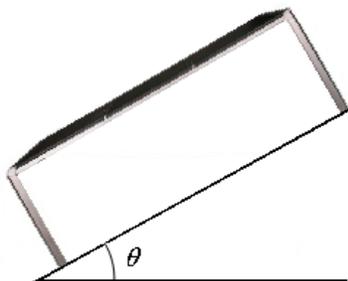
Un homme place une barre de 2 m de long au-dessous d'une grosse pierre qui pèse 4500 N . À quelle distance maximum de la pierre doit-il placer le point d'appui de son levier ?

- S'il pèse 100 kg .
- S'il pèse 80 kg .
- S'il pèse 50 kg .

18.3.2 Centre de gravité

Exercice 1

Pour quelle valeur de l'angle θ la table basculera-t-elle ?



Exercice 2

Trois poids sont alignés sur une barre de poids négligeable et de 6 m de longueur. Calculer la position du centre de gravité du système si les poids $p_1 = 2\text{ N}$, $p_2 = 5\text{ N}$ et $p_3 = 10\text{ N}$ sont respectivement disposés selon des distances $x(p_1) = x_1\text{ m}$, $x(p_2) = x_2\text{ m}$ et $x(p_3) = x_3\text{ m}$.

- Soit $x_1 = 1\text{ m}$, $x_2 = 2\text{ m}$, $x_3 = 5\text{ m}$.
- Soit $x_1 = 1\text{ m}$, $x_2 = 5\text{ m}$, $x_3 = 2\text{ m}$.
- Soit $x_1 = 2\text{ m}$, $x_2 = 1\text{ m}$, $x_3 = 5\text{ m}$.
- Soit $x_1 = 2\text{ m}$, $x_2 = 5\text{ m}$, $x_3 = 1\text{ m}$.
- Soit $x_1 = 5\text{ m}$, $x_2 = 2\text{ m}$, $x_3 = 1\text{ m}$.

- Soit $x_1 = 5 \text{ m}$, $x_2 = 1 \text{ m}$, $x_3 = 2 \text{ m}$.

Exercice 3

Les bateaux qui retournent à leur port d'attache, sans chargement, sont munis de ballasts qu'ils remplissent d'eau (autrefois, ils étaient chargés de pierres). Pourquoi ?

Exercice 4

Une poutre d'acier à une masse de 1000 kg et une longueur de 10 m . La poutre est en équilibre sur un bloc de béton mais elle dépasse de 4 m le bord du bloc. Jusqu'à quelle distance un homme de 100 kg peut-il avancer sur la poutre ?

Exercice 5

Les essieux d'une voiture sont distants de 3 m . Les roues avant supportent un poids total de 9000 N et les roues arrière un poids de 7000 N . À quelle distance se trouve le centre de gravité de la voiture par rapport à l'essieu avant ?

Exercice 6

Un promeneur de 80 kg porte un sac de 20 kg . Le centre de gravité du promeneur est à $1,1 \text{ m}$ au-dessus du sol lorsqu'il ne porte aucune charge. Le centre de gravité du sac se situe à $1,3 \text{ m}$ au-dessus du sol lorsqu'il est sur le dos du promeneur. À quelle distance se trouve le centre de gravité du promeneur lorsqu'il porte le sac ?

Exercice 7

Une unité astronomique (*u.a.*) correspond à la distance terre-soleil ($1,50.10^{11} \text{ km}$). La terre à une masse de $5,98.10^{24} \text{ kg}$.

- Sachant que la masse du soleil vaut $1,99.10^{30} \text{ kg}$, estimer, en *u.a.*, la position du centre de masse du système terre-soleil.
- Sachant que la masse de la lune vaut $7,35.10^{22} \text{ kg}$, estimer, en *u.a.*, la position du centre de masse du système terre-lune, sachant que la distance terre-lune vaut $3,84.10^8 \text{ m}$.

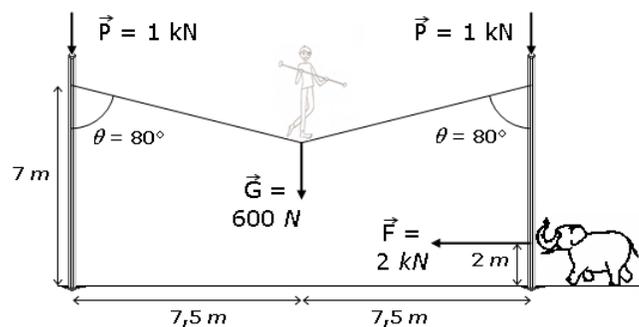
18.3.3 Réactions de liaison

Exercice 1

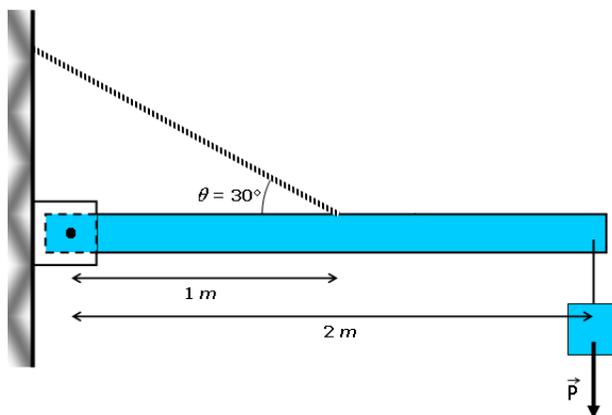
Une masse de 100 N est suspendue par deux câbles formant un angle de 30° avec la verticale. Quelle est la tension exercée par la masse sur les câbles ?

Exercice 2

Quelles sont les réactions des appuis dans le sol des piquets représentés sur le schéma ?

**Exercice 3**

Sur le schéma, la barre et le câble sont de poids négligeable. Le câble casse lorsque la tension dépasse 2000 N . Quel est le poids maximum P qui peut être attaché à la barre ?

**Exercice 4**

Sachant qu'une branche de chêne supporte un couple de 400 Nm , déterminer la distance maximum que pourra parcourir un enfant de 20 kg sur cette branche.

Exercice 5

Déterminer les réactions de liaison de l'appui A représenté sur le schéma 18.1.

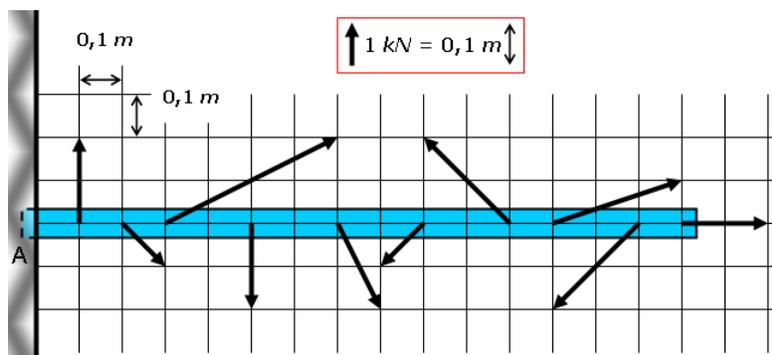


FIG. 18.1 – Exercice 5

Exercice 6

Déterminer les réactions de liaison des appuis A et B représentés sur le schéma 18.2, avec $\|\vec{G}\| = 600 \text{ N}$.

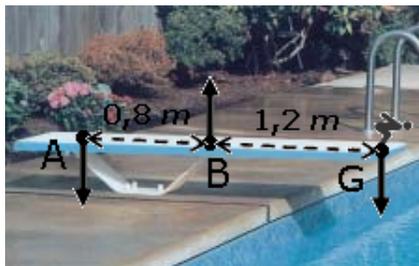


FIG. 18.2 – Exercice 6

Exercice 7

Lors d'une partie de bras de fer, Lincoln Hawk doit affronter un adversaire ayant un avant-bras de 40 cm. Son propre avant-bras a une longueur de 35 cm et le coude de son adversaire est capable de résister à un couple de 250 Nm. La distance séparant la main et l'épaule de notre héros est de 50 cm. Le bras de son adversaire étant plus long que le sien, Lincoln retourne sa casquette pour réfléchir à la situation : à l'avantage mécanique, il ne peut gagner à la régulière! Expliquer.

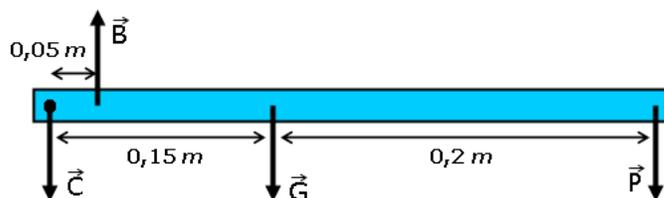
Quelle force son muscle pectoral devra-t-il développer pour casser le coude de son adversaire, sachant que le muscle exerce une traction sur le bras, dont le point d'application est situé au dixième de la distance entre la main et l'épaule?

18.3.4 Exercices récapitulatifs

Exercice 1

L'avant bras d'une personne est représenté sur la figure ci-dessous. Cette personne tient en main un poids P de 12 N . Le poids G de l'avant bras est de 12 N .

- Evaluer la force \vec{B} exercée par le biceps et la force \vec{C} exercée par l'articulation du coude.
- Lorsque la personne lâche le poids, on trouve que la force exercée par le biceps vaut 36 N et la force exercée par l'articulation du coude vaut 24 N . Pourquoi les forces sont-elles plus que doublées dans le cas où la personne tient un poids ?
- Si le biceps subit une contraction d'un cm , quelle sera la variation de position de la charge dans la main ?



Exercice 2

Un vase a une hauteur de $0,4\text{ m}$. Son centre de gravité est à une hauteur de $0,15\text{ m}$ du fond qui a une forme circulaire de $0,05\text{ m}$ de rayon.

- Quelle inclinaison peut-on donner au vase sans le renverser ?
- Quelle inclinaison peut-on donner au vase sans le renverser, sachant que le fond de celui-ci est lesté d'un cylindre en plomb circulaire de même rayon que le fond, d'une hauteur de $0,02\text{ m}$ (densité du plomb = $11,25$) ?

Exercice 3

On utilise une planche de 4 m de long pour déterminer le centre de gravité d'une personne. Lorsqu'une personne se trouve sur la planche, les balances, situées aux extrémités de celle-ci indiquent respectivement 200 N et 600 N . où se trouve le centre de gravité de la personne ?

Exercice 4

Une planche homogène a une masse de 20 kg et mesure 2 m de long. On y pratique un trou circulaire dont le centre est situé à $0,5\text{ m}$ d'une extrémité de la planche. Si, dans ces conditions, le centre de gravité est à $0,9\text{ m}$ de l'autre extrémité de la planche, quelle masse de bois a-t-on enlevée ?

Exercice 5

Le dessus d'une table carrée à quatre pieds a une masse de 20 kg . Les pieds se trouvent aux quatre coins et ont une masse de 2 kg chacun. Les dimensions de la table sont $h = 0,8 \text{ m}$ et $L = 1 \text{ m}$. Pour quelle valeur de l'angle θ que forme la table avec l'horizontale, celle-ci basculera-t-elle (voir figure 18.3.2) ?

Exercice 6

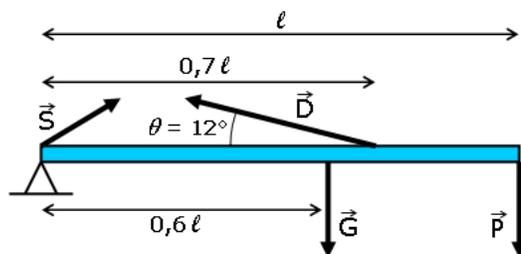
Un cheval a la jambe avant gauche en l'air. Les jambes arrière gauche et avant droite supportent chacune 1500 N . Le poids total du cheval vaut 5000 N .

- Quelle force est exercée par la jambe arrière droite ?
- Trouver la position du centre de gravité, sachant que les pattes arrières du cheval sont distantes de $0,5 \text{ m}$ et que la patte arrière droite et la patte avant droite sont distantes de $1,5 \text{ m}$.

Exercice 7

Dans la figure, le poids G de la partie supérieure du corps vaut 490 N . Evaluer la force D exercée par les muscles du dos et les composantes selon x et z de la force S exercée par le sacrum, si le poids P de la tête vaut

- 0 N ,
- 175 N .

**18.4 Dynamique****18.4.1 Densité - masse - masse volumique****Exercice 1**

Déterminer la masse de 12 cm^3 de glycérine à 20° C et 1 atm .

Exercice 2

Sachant que pour un gaz parfait, $p_1 V_1 = p_2 V_2$, estimer la densité de l'hélium à la pression de 3 atm . (On suppose que l'hélium se comporte comme un gaz parfait à la température de 0° C .)

Exercice 3

À quel volume correspond 250 g d'azote à 0° C à la pression d'une atmosphère ?

Exercice 4

Un alliage de L_i et de M_g flottera-t-il ?

- S'il est composé de 100 % de L_i .
- S'il est composé de 100 % de M_g .
- S'il est composé de 34 % de L_i et 66 % de M_g .
- S'il est composé de 66 % de L_i et 34 % de M_g .

Exercice 5

Un sac étanche contenant un mélange de terre végétale et de sciure de pin est plongé dans un lac. À partir de quelle proportion de sciure de pin le sac flottera-t-il ?

Exercice 6

Si l'on considère que la terre et vénus ont approximativement la même densité moyenne (entre 5 et 5,5), estimer le rayon de vénus, sachant qu'une personne pesant 500 N à la surface de la terre en peserait 450 N sur vénus. Vérifier les résultats avec le tableau ci-dessous

	Soleil	Mercure	Venus	Terre	Lune	
Dist. soleil (<i>km</i>)	0	57909175	108208930	149597890	384000	distance terre-lune
et (<i>AU</i>)	0 <i>U.A.</i>	0,387 <i>A.U.</i>	0,723 <i>A.U.</i>	1 <i>A.U.</i>	$2,6 \cdot 10^{-3}$ <i>A.U.</i>	
Diamètre (<i>km</i>)	1392000	4878	12250	12730	3480	
Volume (Terre=1)	1295000	0,054	0,88	1	0,02	
Masse (<i>kg</i>)	$1,989 \cdot 10^{30}$	$3,302 \cdot 10^{23}$	$4,8690 \cdot 10^{24}$	$5,9742 \cdot 10^{24}$	$7,35 \cdot 10^{22}$	
Densité	1,41	5,43	5,24	5,515	3,34	
Vit. équa. (<i>km/s</i>)	2	4,25	10,36	11,18		
Temp. surface (<i>K</i>)		440	730	288 à 293		
Satellites	8	0	0	1		
Gravitation (<i>m/s²</i>)	274	3,70	8,87	9,80	1,62	
	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
Dist. soleil (<i>km</i>)	227936640	778412010	1426725400	2,870,972,200	4498252900	5906376200
et (<i>AU</i>)	1,524 <i>A.U.</i>	5,203 <i>A.U.</i>	9,537 <i>A.U.</i>	19,191 <i>A.U.</i>	30,069 <i>A.U.</i>	39,482 <i>A.U.</i>
Diamètre (<i>km</i>)	6828	142000	107200	49260	44600	env. 2000
Volume (Terre=1)	0,149	1316	755	52	44	0,005
Masse (<i>kg</i>)	$6,4191 \cdot 10^{23}$	$1,8987 \cdot 10^{27}$	$5,6851 \cdot 10^{26}$	$8,6849 \cdot 10^{25}$	$1,0244 \cdot 10^{25}$	$1,3 \cdot 10^{22}$
Densité	3,94	1,33	0,7	1,30	1,76	2
Vit. équa. (<i>km/s</i>)	5,02	59,54	35,49	21,29	23,71	1,2
Temp. surface (<i>K</i>)	186 à 268					40
Satellites	2	63	48	27	13	1
Gravitation (<i>m/s²</i>)	3,71	23,12	8,96	8,69	11,00	0,60

Exercice 7

Si la densité de jupiter vaut approximativement 1,33 et celle de la terre 5,5, sachant que la gravité à la surface de jupiter vaut 2,3 fois celle de la terre, estimer le rayon de jupiter. Vérifier le résultat sur le tableau de la question précédente.

18.4.2 Poids et gravitation**Exercice 1**

Sachant que la constante de gravitation universelle $G = 6,68 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, que le rayon de la terre vaut $R_T = 6367,6 \text{ km}$ en moyenne et que la gravité au voisinage de la terre vaut $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ en moyenne,

- Calculer la masse de la terre.
- Calculer la masse volumique de la terre.
- Sachant que les couches superficielles ont une densité de 2,7 (eau et roches), que peut-on dire sur les couches internes ?

Exercice 2

Sachant que la distance terre-soleil vaut environ 150 millions de km et que la période de la terre vaut 365,25 jours, calculer la masse du soleil.

Exercice 3

Un satellite tourne au voisinage de la terre, il est donc soumis à une accélération centripète qui équivaut à la constante de gravitation g . Sachant que le Spoutnik avait une masse de 83 kg et une période de révolution de 96 minutes, déterminer l'altitude de ce satellite.

Exercice 4

Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire

- en considérant g constant,
- en considérant $g = G \frac{m_T}{d^2}$.

Exercice 5

Un satellite artificiel se trouve sur une orbite circulaire dont le rayon vaut $\frac{1}{4}$ du rayon de l'orbite lunaire. Quelle est sa période ?

Exercice 6

Si le rayon de l'orbite terrestre autour du soleil vaut 1 u.a. (unité astronomique), à quelle distance du soleil se trouverait un astéroïde dont la période est de 8 ans ?

Exercice 7

La distance séparant mars du soleil est, en moyenne, de $1,524 \text{ u.a.}$ Quelle est la période de révolution de mars autour du soleil ? (Vérifier avec les données de l'exercice 6 de la section précédente.)

18.4.3 Exercices récapitulatifs**Exercice 1 : 1^{ère} loi de Newton**

Un avion de 2000 kg vole à une altitude constante et à vitesse constante.

- Quelle force résultante agit sur l'avion ?
- Que vaut la force de poussée exercée par l'air sur l'avion ?

Exercice 2 : 1^{ère} loi de Newton

Une caisse d'équipement de secours est parachutée d'un avion. La force due à la résistance de l'air augmente, approximativement, avec le carré de la vitesse. La caisse atteint donc rapidement une vitesse limite constante dirigée vers le bas.

- Lorsque la caisse a atteint cette vitesse, est-elle en équilibre ?
- Que deviendra son mouvement si un coup de vent la pousse de côté ?
- Que deviendra son mouvement si elle rencontre un courant d'air descendant ?

Exercice 3 : 2^{ème} loi de Newton

Quelle force résultante est nécessaire pour fournir une accélération de 3 m/s^2 à une voiture de 1 t ?

Exercice 4 : 2^{ème} loi de Newton

Un fémur humain se fracture si la force de compression dépasse 2.10^5 N . Une personne, dont la masse est de 60 kg , se reçoit sur une jambe.

- Quelle accélération produira une fracture ?
- Que vaut cette accélération par rapport à l'accélération de la pesanteur ?

Exercice 5 : 3^{ème} loi de Newton

Une voiture s'arrête sur une route droite et plate, moteur débrayé.

- Quelles sont les forces qui s'exercent sur la voiture ?

- Quelles sont les forces de réaction ?

Exercice 6 : 3^{eme} loi de Newton

Un gros avion est tiré, à vitesse constante, le long d'une piste par un camion. Les deux véhicules sont reliés par une barre de fer.

- Quelles sont les forces qui s'exercent sur l'avion ?
- Quelles sont les forces qui s'exercent sur le camion ?
- Quelle est la force résultante sur l'avion ?
- Quelle est la force résultante sur le camion ?
- Quelle est la force résultante sur la barre de fer ?

Exercice 7 : poids, densité et gravitation

Une planète inconnue a un rayon égal à un tiers de celui de la terre. Sa densité moyenne vaut 5,5.

- Quel sera le poids d'un spationaute dont la masse est de 70 kg ?
- À quelle planète du système solaire cette planète inconnue ressemble-t-elle a priori ?

18.5 Théorèmes énergétiques

18.5.1 Travail

Exercice 1

Un enfant tire une petite voiture avec une force de 10 N. Cette force fait un angle de 20° avec l'horizontale. Si la voiture parcourt une distance de 6 m, quel est le travail fourni par l'enfant ?

Exercice 2

Une femme pousse une chaise horizontalement avec une force de 300 N. Evaluer le travail qu'elle effectue

- si la chaise est déplacée de 2 m parallèlement à la force,
- si la chaise est déplacée de 1 m dans la direction opposée à la force,
- si la chaise reste immobile.

Exercice 3

On exerce une force constante de 2000 N sur un wagon placé sur des rails et le wagon avance de 2 m. Si le travail total effectué par la force lors du déplacement vaut 1 kJ, quel est l'angle formé entre la force et la direction du déplacement ?

Exercice 4

Une moto s'arrête en dérapant sur une distance de 5 m . Durant ce dérapage, la force exercée par la route sur la moto vaut 200 N . Cette force a une direction opposée au mouvement.

- Quel travail la route effectue-t-elle sur la moto ?
- Quel travail est effectué par la moto sur la route ?

Exercice 5

Un fou tire une brosse à dents pesant $0,04\text{ N}$. La brosse à dents se déplace sur une distance de 1 km , à vitesse constante. Quel travail effectue le fou si le coefficient de frottement cinétique de la brosse à dents vaut $0,2$?

Exercice 6

Un boulet, ayant une masse de 10 kg tombe à la verticale d'une hauteur de 2 m . Quel est le travail effectué par la pesanteur ?

Exercice 7

Une voiture, ayant une masse de 1300 kg , parcourt une distance de 100 m en descendant une côte. La route forme un angle de 10° avec l'horizontale. Quel est le travail effectué sur la voiture par la pesanteur ?

18.5.2 Energie cinétique et potentielle

Exercice 1 : E_c

Une balle de base-ball a une masse de $0,15\text{ kg}$. Elle est lancée à la vitesse de 10 m/s .

- Que vaut son énergie cinétique ?
- Si la balle est lancée par un homme qui exerce une force constante sur une distance de $1,5\text{ m}$, que vaut cette force ?

Exercice 2 : E_c

Un homme de 100 kg se trouve dans une voiture qui avance à la vitesse de 20 m/s .

- Quelle est l'énergie cinétique de cet homme ?
- La voiture percute un mur. L'avant de la voiture s'écrase sur une distance de 1 m et la voiture s'immobilise. Que vaut la force moyenne exercée par la ceinture de sécurité pendant la collision ?

Exercice 3 : E_c

Les lignes de pêche sont habituellement caractérisées par la force à laquelle elles peuvent résister. Quelle résistance est nécessaire pour ferrer un saumon de 10 kg nageant à la vitesse de 3 m/s , si l'on veut l'immobiliser sur une distance de $0,2\text{ m}$?

Exercice 4 : E_c

Une balle de base-ball est lancée du centre du terrain vers la seconde base. Sa vitesse diminue de 20 m/s à 15 m/s . Si la masse de la balle est de $0,15 \text{ kg}$, quelle est l'énergie perdue en raison de la résistance à l'air ? (Supposer que les hauteurs initiales et finales sont identiques.)

Exercice 5 : E_p

Quel travail doit effectuer une pompe pour extraire 100 kg d'eau d'un puits profond de 300 m ? (Négliger la variation d'énergie cinétique.)

Exercice 6 : E_p

Un ascenseur et ses occupants ont une masse totale de 2000 kg . Le contrepoids est assuré par une pièce métallique dont la masse est de 1700 kg . Le contrepoids descend lorsque l'ascenseur monte. Quel travail le moteur doit-il effectuer contre la pesanteur pour élever l'ascenseur de 30 m ?

Exercice 7 : E_p

Un saumon de $4,5 \text{ N}$ remonte, à vitesse constante, une échelle à poissons sur une distance de 5 m (non horizontale). L'eau exerce une force dissipative de $1,3 \text{ N}$. Le poisson s'élève de $0,5 \text{ m}$ en remontant l'échelle.

- Quel travail le poisson doit-il effectuer pour compenser la force dissipative ?
- Quelle est la variation d'énergie potentielle du poisson ?
- Quel est le travail total effectué par le poisson en remontant l'échelle ?

18.5.3 Puissance

Exercice 1

Une fillette de 40 kg escalade, à vitesse constante, une corde de 8 m en 15 secondes. Quelle puissance dépense-t-elle contre les forces gravitationnelles au cours de cette ascension ?

Exercice 2

Le moteur d'un ascenseur a une puissance de 2000 W . À quelle vitesse peut-il soulever une charge de 1000 kg ?

Exercice 3

Le moteur d'une pompe à eau a une puissance de 1000 W . Si la variation d'énergie cinétique est négligeable, combien de kg d'eau peut-il extraire par seconde d'un puits profond de 20 m ?

Exercice 4

Une voiture de 2000 kg part du repos, accélère et atteint la vitesse de 30 m/s en 10 secondes. Quelle est la puissance moyenne développée par la voiture ?

Exercice 5

Un cycliste roule sur terrain plat à la vitesse constante de 5 m/s . Il dépense 100 W contre les forces dissipatives.

- Si les forces dissipatives sont indépendantes de la vitesse, quelle puissance doit-il fournir lorsqu'il roule à 10 m/s ?
- Si les forces dissipatives qui proviennent de la résistance à l'air sont, en première approximation, proportionnelles au carré de la vitesse, quelle puissance le cycliste doit-il fournir à la vitesse de 10 m/s ?

Exercice 6

Le rayonnement solaire direct libre, sur terre, a une puissance moyenne de 200 W par mètre carré de surface horizontale. On fait la moyenne de cette valeur sur 24 heures, sur les différentes époques de l'année et sur les variations météorologiques. Supposer que 10% de cette énergie solaire puisse être convertie en énergie électrique.

- De quelle surface en km^2 devrait-on disposer pour remplacer une centrale nucléaire de 1 GW ?
- Pour ses besoins domestiques, une famille américaine moyenne de 4 personnes utilise environ 8 kW de puissance. Si 20% de l'énergie solaire est captée, de quelle surface doit-on disposer pour fournir les 8 kW ?
- Comparer ce résultat à la surface moyenne estimée du toit d'une maison unifamiliale.

Exercice 7

L'énergie solaire est reçue, à la surface de la terre, à un taux de 350 W/m^2 . Cette valeur est une moyenne qui tient compte de la latitude, du moment de la journée et de l'année, et des conditions atmosphériques. Environ 2% de cette énergie est convertie, par de complexes processus climatiques, en énergie éolienne.

- Trouver le rapport entre la puissance du vent produite par le soleil à la surface du globe et la puissance totale utilisée par l'humanité, soit environ 10^{13} W . (Le rayon de la terre vaut $6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$.)
- On suppose qu'au maximum 3% de l'énergie éolienne pourrait être domestiquée. Ceci serait-il suffisant pour assurer les besoins énergétiques de l'humanité ?

18.5.4 Conversion énergie - travail**Exercice 1**

Un skieur dévalle une colline en partant du repos. La hauteur de la colline est de 20 m . Si le frottement est négligeable, quelle sera la vitesse au bas de la pente ?

Exercice 2

Une voiture roulant à la vitesse de 40 m/s percute un mur. De quelle hauteur la voiture devrait-elle tomber pour subir le même dommage en percutant une surface identique au mur ?

Exercice 3

Une balle de base-ball, lancée à la verticale, atteint une hauteur de 50 m . Quelle était sa vitesse initiale ? (Négliger la résistance à l'air.)

Exercice 4

Une canette de bière passe devant une fenêtre à la vitesse de 30 m/s . Quelle sera sa vitesse après une chute de 20 m ?

Exercice 5

Un traîneau glisse sur 100 m le long d'une colline dont la pente fait un angle de 30° avec l'horizontale. Il atteint la vitesse finale de 20 m/s au bas de la pente. Quelle fraction de l'énergie est dissipée par les forces de frottement ?

Exercice 6

De l'eau tombe d'une cascade. Elle a une vitesse de 3 m/s au sommet et une vitesse de 15 m/s en bas. L'altitude varie de 200 m à 180 m par rapport au niveau de la mer. Quelle fraction de l'énergie potentielle perdue par l'eau est dissipée ?

Exercice 7

En quittant le lac Ontario, le Saint-Laurent a un débit de $6800\text{ m}^3/\text{s}$. Le lac est situé à 75 m au-dessus du niveau de la mer. Sans tenir compte de l'eau qui rejoint la rivière en aval, quelle énergie maximum pourrait, en principe, être produite par une centrale électrique sur une période de 24 h ? (La masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3 .)

18.5.5 Exercices récapitulatifs

Exercice 1

Une voiture de course pilotée par Tom Cruise pèse 2000 kg .
– Que vaut l'énergie cinétique s'il roule à 195 km/h ?

- Pour que cette vitesse soit atteinte en 10 secondes, quelle puissance moyenne faut-il fournir ?
- Si 1 litre d'essence représente $3,4 \cdot 10^7 \text{ J}$ d'énergie chimique et qu'une voiture utilise 12,5% de cette énergie pour se déplacer, de combien de litres d'essence seront-ils nécessaires pour, en partant au repos, atteindre une vitesse de 195 km/h ?

Exercice 2

On peut évaluer la quantité d'énergie maximum qui peut être produite par les centrales hydro-électriques aux Etats-Unis. Les chutes de pluie annuelles représentent une hauteur moyenne de $0,75 \text{ m}$ et les USA ont une superficie de $8 \cdot 10^6 \text{ km}^2$.

- Evaluer la masse des eaux de pluviales.
- Si l'on tient compte des montagnes, des plaines et des régions côtières, l'altitude moyenne est d'environ 500 m . Si toutes les eaux pluviales finissent par atteindre les océans, quelle est l'énergie potentielle dissipée ?
- En fait, les deux tiers de l'eau s'évaporent dans l'atmosphère. Si l'on suppose que le reste est utilisé pour produire de l'énergie électrique, quelle serait la puissance moyenne produite en supposant qu'il n'y ait pas d'énergie dissipée sous forme de chaleur ?

Exercice 3

Les centrales nucléaires travaillent plus économiquement lorsqu'elles fonctionnent à régime maximum 24 h par jour, sans transitoires. Dès lors, on peut stocker l'excès d'énergie électrique en pompant l'eau dans des réservoirs situés au sommet d'une montagne. Pendant un pic de consommation électrique, on peut récupérer cette énergie en laissant redescendre l'eau dans les turbines. Une telle installation existe à la montagne Northfield dans le Massachusetts (près de Springfield). La chute d'eau a une hauteur moyenne de 250 m . Le réservoir a une surface de $1,3 \text{ km}^2$ et une profondeur moyenne de 10 m .

- Quelle énergie est disponible chaque fois que le réservoir est vidé ?
- Si la vidange s'effectue sur une période de 10 h et que 80% de l'énergie est convertie en électricité, quelle est la puissance disponible ?

Exercice 4

Sachant que la force gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2 s'attirant est notée $\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{1}_r$, estimer l'énergie gravitationnelle de la lune, située à une distance $r \approx 384000 \text{ km}$ de la terre.

Exercice 5

Une navette spatiale de masse m est en orbite circulaire autour de la terre. La distance qui la sépare de la surface de la terre est égale au rayon terrestre. Quelle énergie est nécessaire pour doubler son altitude ?

Exercice 6

Sachant que la force électrostatique entre deux charges q_1 et q_2 s'attirant est notée $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{1}_r$,

estimer l'ordre de grandeur du rayon décrit par un électron autour d'un proton, si son énergie électrostatique vaut $13,6 \text{ eV}$. (Pour estimer le rayon, ne considérer que la contribution de la force électrostatique.)

La charge d'un proton et d'un électron valent, en valeur absolue, $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, la permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ et 1 eV (électron-volt) $= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Exercice 7

Une partie de la puissance qui assure le mouvement d'une voiture est dissipé par la résistance de l'air. Une autre partie correspond au travail de déformation des pneus (résistance de la route). À 65 km/h , ces deux valeurs sont pratiquement égales.

- La résistance de l'air varie approximativement avec le carré de la vitesse tandis que les forces résistantes de la route sont pratiquement indépendantes de la vitesse. De combien augmentera la puissance nécessaire à la voiture si sa vitesse double ?
- De quel facteur sera réduit le nombre de kilomètres parcourus avec un litre d'essence ?

Chapitre 19

Mécanique des fluides

19.1 Fluides non-visqueux

19.1.1 Poussée d'Archimède

Exercice 1

Un homme de 75 kg flotte dans l'eau douce. La quasi-totalité de son corps se trouve sous la surface. Quel est son volume ?

Exercice 2

Un objet pèse 100 N dans l'air et 75 N dans l'eau. Quelle est la densité de cet objet ?

Exercice 3

Un réservoir d'eau placé sur une balance pèse 200 N . On y introduit un saumon d'un poids de 12 N qui nage dans le réservoir (poids apparent). Quelles sont les mesures relevées sur la balance, sachant que la densité du saumon vaut environ $1,23$?

Exercice 4

Un ballon a une capacité de $0,1 \text{ m}^3$. Rempli d'hélium, quel poids peut-il soulever ? Utiliser les masses volumiques de l'hélium et de l'air données dans les conditions normales (voir cours).

Exercice 5

On laisse tomber une bûche de 40 kg dans une rivière à 0°C . Si la bûche a une densité de $0,8$, quelle fraction de son volume émergera-t-il de l'eau ?

Exercice 6

Pour déterminer la densité du sucre soluble dans l'eau, on le plonge dans du benzène. Un morceau de sucre ayant un poids de $0,222\text{ N}$ dans l'air a, dans le benzène, un poids apparent de $0,045\text{ N}$. Calculer la masse volumique et la densité du sucre sachant que la densité du benzène vaut 878 kg/m^3 .

Exercice 7

Une bille de cuivre est creuse. Son poids est de 5 N dans l'air et son poids apparent est de $4,1\text{ N}$ lorsqu'elle est immergée dans l'eau. Calculer le volume du creux intérieur de la bille, sachant que la masse volumique du cuivre vaut $8,94 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$.

Exercice 8

Un récipient contient 10 cm d'eau surmonté de 10 cm d'huile de densité $0,6$. Un bloc cubique de 10 cm de côté reste en équilibre au sein du liquide de telle sorte qu'il plonge de 2 cm dans l'eau. Calculer la masse volumique du bloc.

Exercice 9

Un ballon a les caractéristiques suivantes :

- volume = 500 m^3 ,
- masse de l'enveloppe = 60 kg ,
- masse de la nacelle = 30 kg ,
- masse du lest = 50 kg ,
- masse de l'aéronaute = 70 kg .

Le ballon est gonflé à l'aide d'un gaz de masse volumique $0,4\text{ kg/m}^3$. La masse volumique de l'air est de $1,293\text{ kg/m}^3$. Que vaut la force ascensionnelle du ballon ? Quelle est son accélération de départ ? ($g = 10\text{ m/s}^2$.)

19.1.2 Equation de continuité**Exercice 1**

Dans un tuyau de 50 cm^2 de section, un liquide s'écoule à la vitesse de 1 m/s . Le tuyau se rétrécit et la section tombe à 20 cm^2 . Quelle est la vitesse du liquide dans la partie étroite et que vaut le débit ?

Exercice 2

De l'eau s'écoule dans un tuyau horizontal et le débit est égal à 2 l/s . Calculer la différence de pression entre deux points où les sections du tuyau sont respectivement de 20 et 50 cm^2 .

Exercice 3

Le rayon d'une conduite d'eau décroît de $0,2$ à $0,1$ m . La vitesse moyenne dans la portion la plus large du tuyau est égale à 3 m/s . Que vaut la vitesse moyenne dans la partie la plus étroite ?

Exercice 4

Un tuyau d'arrosage d'une section de 2 cm^2 a un débit de 200 cm^3/s . Calculer la vitesse moyenne de l'eau.

Exercice 5

Un vaisseau sanguin de rayon r se ramifie en quatre vaisseaux, chacun de rayon $r/3$. Si la vitesse moyenne dans le vaisseau le plus large est égale à v , trouver la vitesse moyenne dans chacun des petits vaisseaux.

19.1.3 Equation de Bernoulli**Exercice 1**

Si l'eau monte du rez-de-chaussée au premier étage à travers des tuyaux à section constante, la pression est-elle partout la même ? Expliquer.

Exercice 2 : conséquences statiques

Des photos sous-marines ont été prises à une profondeur de 8000 m . Quelle est la pression à cette profondeur ? Quelle est la force appliquée sur l'objectif, sachant que celui-ci mesure $0,1$ m sur $0,15$ m ?

Exercice 3 : conséquences statiques

Quelle est la différence de pression entre le coeur et le cerveau d'une girafe si le cerveau se trouve à 2 m au-dessus du niveau du coeur ? (Supposer que la vitesse du sang est la même aux deux endroits.)

Exercice 4 : conséquences statiques

Estimer la différence de pression atmosphérique entre le niveau de la mer et le sommet d'une colline haute de 500 m . ($T = 0^\circ C$.)

Exercice 5 : conséquences statiques

Jusqu'à quelle hauteur l'eau peut-elle s'élever dans les tuyaux d'un immeuble si la pression de jauge au niveau du rez-de-chaussée est égale à $2 \cdot 10^5$ Pa ?

Exercice 6 : conséquences statiques

Un sous-marin plonge à une profondeur de 100 m dans la mer. De quelle pression de jauge devra-t-on disposer afin de chasser l'eau des ballasts ?

Exercice 7 : conséquences statiques

Une certaine pression peut supporter une colonne d'eau pure d'une hauteur de $0,7\text{ m}$. La même pression supportera une colonne d'une solution saline de $0,6\text{ m}$ de haut. Quelle est la masse volumique de la solution saline ?

Exercice 8 : conséquences statiques

On introduit une canule dans une grosse artère. On se sert d'une solution saline de masse volumique de 1300 kg/m^3 comme liquide de manomètre. Quelle est la pression du sang (pression de jauge) si la différence de hauteur dans les tubes du manomètre est de $0,67\text{ m}$?

Exercice 9 : conséquences dynamiques

Un tube de Venturi a un rayon de 1 cm dans sa partie la plus étroite et 2 cm dans sa partie la plus large où la vitesse de l'eau est de $0,1\text{ m/s}$. Trouver la vitesse et la chute de pression dans la partie étroite.

Exercice 10 : conséquences dynamiques

Un réservoir d'eau de 10 m de haut est percé d'un petit trou à sa base. En supposant que les dimensions du réservoir soient suffisamment importantes pour négliger la perte de liquide, quelle est la vitesse de l'eau sortant par la fuite ?

Exercice 11 : conséquences dynamiques

Dans une expérience de physique, une balle de ping-pong reste en suspension dans un entonnoir tenu à l'envers lorsqu'on souffle de l'air par l'embouchure étroite de cet entonnoir. Expliquer brièvement pourquoi la balle ne tombe pas.

19.1.4 Exercices récapitulatifs**Exercice 1 : Archimède**

Un morceau de chêne pèse 90 N dans l'air. Un bloc de plomb pèse 130 N quand il est immergé dans l'eau. Attachés l'un à l'autre, ils pèsent 100 N dans l'eau. Quelle est la masse volumique du bois ?

Exercice 2 : Archimède

Trouver l'accélération initiale d'une bille d'acier ($d_{acier} \approx 8$) placée
– dans l'eau,

- dans le mercure.

Spécifier le sens de l'accélération dans chacun des cas.

Exercice 3 : pression

Un vérin hydraulique a des pistons de section 1500 cm^2 et 75 cm^2 . Il est employé pour soulever un fauteuil de dentiste de 1500 N .

- Quelle force faut-il appliquer sur le petit piston pour soulever le fauteuil ?
- Quelle distance le petit piston doit-il parcourir pour que le fauteuil soit levé de $0,1 \text{ m}$?

Exercice 4

Un réservoir contient de l'oxygène gazeux à 0°C . La pression au fond du réservoir vaut 100 atm . Sachant que le réservoir est profond de 1 m , calculer la pression en haut du réservoir. (Supposer que la masse volumique moyenne de l'oxygène est de 143 kg/m^3 .)

Exercice 5

Lors d'une transfusion de sang complet, l'aiguille est insérée dans une veine où la pression est de 2000 Pa . À quelle hauteur, par rapport à la veine, faut-il placer le récipient de sang pour que le sang puisse tout juste entrer dans la veine ?

Exercice 6

Pour vider un réservoir d'eau, on se sert d'un siphon d'une section de $3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. On procède comme suit. On ferme les deux bouts du siphon initialement rempli d'eau. Ensuite on place l'un des bouts à 25 cm au-dessous de la surface du réservoir. L'autre extrémité, on la laisse pendre librement à l'extérieur du récipient, à 50 cm du bout immergé.

- Calculer la vitesse de l'eau à la sortie du siphon, peu de temps après l'ouverture des extrémités du siphon.
- Le débit est-il constant ?
- Quelle est la vitesse de l'eau à la sortie quand la surface libre du réservoir se trouve à 10 cm au-dessus du bout immergé ?

Exercice 7

On veut vider un réservoir d'essence au moyen d'un siphon. L'une des extrémités du siphon est insérée dans le réservoir à une profondeur de $0,3 \text{ m}$ tandis que l'autre est placée à l'extérieur, à $0,2 \text{ m}$ au-dessous du niveau du bout immergé. La section droite interne du siphon est de $4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Calculer le débit et la vitesse d'écoulement de l'essence.

19.2 Fluides visqueux

19.2.1 Loi de Poiseuille

Exercice 1

Le rayon d'une grosse artère de chien est de 4 mm . Le débit de sang à travers l'artère est de $1 \text{ cm}^3/\text{s}$.

- Quelle est la vitesse moyenne du sang ?
- Calculer la chute de pression le long de l'artère sur une longueur de $0,1 \text{ m}$.

Exercice 2

Le rayon intérieur d'une artère est de 2 mm . La température est de 37°C et la vitesse moyenne du sang vaut 3 m/s . Trouver le débit et la perte de charge sur $0,05 \text{ m}$, si l'artère est en position horizontale.

Exercice 3

La perte de charge le long d'une artère horizontale est de 100 Pa . Le rayon de l'artère vaut 1 cm et l'écoulement est laminaire.

- Quelle est la force résultante appliquée au sang ?
- Sachant que la vitesse moyenne du sang est de $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$, trouver la puissance qu'il faut dépenser pour entretenir l'écoulement.

Exercice 4

Le rayon d'une artère augmente d'un facteur $1,5$.

- Si la perte de charge reste la même, qu'arrive-t-il au débit ?
- Si le débit ne change pas, qu'arrive-t-il à la perte de charge ?

Supposer l'écoulement laminaire.

Exercice 5

Une aiguille à injection hypothermique est longue de 2 cm . Son rayon intérieur vaut $0,3 \text{ mm}$. Le débit de l'eau forcée à travers l'aiguille est de $10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$. La température de l'eau est de 20°C .

- Calculer la vitesse moyenne de l'eau. Supposer l'écoulement laminaire.
- Quelle est la perte de charge nécessaire pour avoir un tel débit ?

Exercice 6 : viscosité

Une table à coussin d'air, utilisée dans les démonstrations de physique, supporte un chariot qui se déplace sur un mince coussin d'air d'une épaisseur de 1 mm et d'une aire de $0,04 \text{ mm}^2$. Sachant que la viscosité de l'air est de $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, trouver la force qu'il faut exercer sur le chariot pour le déplacer avec une vitesse constante de $0,2 \text{ m/s}$. (Utiliser $F = \eta S \frac{dv}{dy}$.)

19.2.2 Nombre de Reynolds

Exercice 1

Le rayon d'une grosse artère de chien est de 4 mm . La vitesse moyenne du sang est de $1,99 \text{ cm/s}$ et la viscosité vaut $2,084 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. La masse volumique du sang est de $1,0595 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Trouver le nombre de Reynolds et déterminer si l'écoulement est laminaire.

Exercice 2

Dans un conduit d'un rayon de $0,1 \text{ m}$, la vitesse moyenne de l'eau est de $0,2 \text{ m/s}$. La température de l'eau est de 20°C .

- L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?
- Quel est le débit ?

Exercice 3

Le débit d'eau dans un tuyau d'un rayon de $0,02 \text{ m}$ vaut $0,01 \text{ m}^3/\text{s}$ à 20°C .

- Quelle est la vitesse moyenne de l'eau ?
- L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?

Exercice 4

Calculer le nombre de Reynolds de la situation de l'exercice 5 sur la loi de Poiseuille (l'aiguille à injection hypothermique). L'écoulement est-il bien laminaire ?

Exercice 5

Considérer l'écoulement du sang à 37°C dans une artère de 2 mm de rayon.

- Jusqu'à quelle vitesse moyenne du sang l'écoulement reste-t-il laminaire ?
- Quel est le débit Q correspondant ?

19.2.3 Sédimentation

Exercice 1

Un globule de sang d'une masse volumique de $1,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ et d'un rayon de $5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ se trouve dans l'eau. Calculer sa vitesse de sédimentation à 37°C . (Supposer la loi de Stokes valable.)

Exercice 2

Une grosse molécule sphérique a un rayon de $2 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ et une masse volumique de $1,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

- Quelle est la vitesse limite de chute de cette molécule dans l'eau ?

- Quelle est la vitesse maximum pour laquelle la loi de Stokes reste valable ($Re < 1$) ?

Exercice 3

Soient des particules de poussière sphériques d'une masse volumique de 3.10^3 kg/m^3 . Trouver le rayon maximum pour lequel on peut toujours utiliser la loi de Stokes dans le calcul de la vitesse limite

- dans l'air à 20°C ?
- dans l'eau à 20°C ?

Exercice 4

La vitesse limite d'une gouttelette d'huile de forme sphérique, lors de sa chute dans l'air à 20°C , est de 2.10^{-7} m/s . Quel est le rayon de cette gouttelette, si sa masse volumique est de 930 kg/m^3 ? (Supposer la loi de Stokes applicable.)

Exercice 5

- Quelle est la vitesse limite d'une particule de poussière d'un rayon de 10^{-5} m et d'une masse volumique de 2000 kg/m^3 ? La température de l'air est de 20°C .
- Que vaut le nombre de Reynolds à cette vitesse ? La loi de Stokes est-elle applicable ?
- Que vaut la force de résistance à l'air à la vitesse limite ?

Exercice 6

Une protéine de masse volumique 1300 kg/m^3 est centrifugée avec une accélération de 10^6 m/s^2 . Elle acquiert une vitesse de sédimentation de 10^{-6} m/s . À cette vitesse, la résistance visqueuse est de $2,07.10^{-16} \text{ N}$. Trouver la masse de la protéine.¹

19.3 Propriétés dues aux interactions moléculaires

Exercice 1 : Tension superficielle

Un fil métallique en forme de \cap est plongé dans de l'eau à 20°C . Un fil mobile peut coulisser sur les deux branches du \cap . Le fil mobile est long de $0,1 \text{ m}$ et sa masse m_1 est de 1 g .

- Si $\sigma_{eau} = 7,28.10^{-2} \text{ N/m}$, quelle est la valeur de la force de tension superficielle ?
- Si l'on suspend une masse m_2 au fil, celui-ci est en équilibre. Que vaut cette masse m_2 ?

Exercice 2 : Tension superficielle

On dépose une boucle de soie sur la lame liquide d'un anneau métallique qui a été plogé dans une solution savonneuse. Pourquoi la boucle prend-elle une forme circulaire après qu'on ait percé le film à

¹Si la masse volumique du fluide dans lequel se trouve la protéine (de masse m) vaut ρ_l , la poussée d'Archimède vaut $P_a = \rho_l g_e V$ où V est le volume de la protéine et $g_e = r\omega^2$ l'accélération effective. À la vitesse limite de sédimentation, les forces en jeu s'équilibrent et on a $6\pi Rv\eta = mg_e - \frac{\rho_l}{\rho} mg_e$.

l'intérieur de celle-ci ?

Exercice 3 : Capillarité

La sève des arbres, qui est principalement constituée d'eau pendant l'été, s'élève dans un système de capillaires de rayon $r = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. L'angle de contact est nul. La masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3 . Calculer la hauteur d'ascension de l'eau dans un arbre, à une température de 20°C . ($\sigma_{\text{eau}} = 7,28 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$.)

Exercice 4 : Capillarité

Calculer la hauteur d'ascension de l'eau à 0°C dans un tube capillaire de verre de 10^{-3} m de rayon.

Exercice 5 : Capillarité

Calculer la dépression du ménisque du mercure dans un tube capillaire de 10^{-4} m de rayon.

Exercice 6 : Capillarité

Calculer la hauteur d'ascension de l'alcool éthylique dans un tube en verre de $0,04 \text{ mm}$ de diamètre. La masse volumique de l'éthanol est de 791 kg/m^3 .

Exercice 7 : Capillarité

Un tube de verre de 1 mm de rayon est utilisé dans la construction d'un baromètre à mercure.

- De quelle distance la surface du mercure sera-t-elle déplacée par les effets de capillarité ?
- Sachant que la hauteur de la colonne de mercure est de $0,76 \text{ m}$, calculer l'erreur relative commise si l'on néglige les effets capillaires.
- Si les effets de capillarité doivent être inférieurs à $0,01\%$ de la hauteur de la colonne, quel doit être le rayon minimum du tube ?